

1.	Liczby i działania	3
2.	Logarytmy.....	4
3.	Funkcja kwadratowa.....	6
4.	Funkcje.....	8
5.	Trygonometria	12
6.	Ciągi, szeregi, granice	14
7.	Kombinatoryka i prawdopodobieństwo	16
8.	Planimetria	19
9.	Analityczna	24
10.	Bryły.....	29

1. Liczby i działania

1.1 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 3. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby rzeczywistej y , spełniających warunek $x + y \geq 1$, prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$$

1.2 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 8. (0–5)

Rozwiąż nierówność

$$\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} \geq \frac{3}{2+x} + 2$$

Zapisz obliczenia.

1.3 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 4. (0–3)

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$.

Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

1.4 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ dla każdej liczby rzeczywistej a .

1.5 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

Zadanie 5. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$$

1.6 Poziom rozszerzony, czerwiec 2024

Zadanie 5. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$

1.7 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 6. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$|4x - 8| + |x - 2| = |2 - x| + |x + 2| + 4$$

Zapisz obliczenia.

1.8 Poziom rozszerzony, maj 2025

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

2.
0–1–
2–3

--

1.9 Poziom rozszerzony, maj 2025

Zadanie 5. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$$

Zapisz obliczenia.

2. Logarytmy

2.1 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 1. (0–2)

Oblicz

$$\frac{\log_3 5 \cdot \log_{25} 27}{\log_7 \sqrt[6]{49}}$$

Zapisz obliczenia.

2.2 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 12.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$ dla każdej liczby dodatniej x .

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x wyrażenie

$$81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$$

można równoważnie przekształcić do postaci $x^4 + x^2 - 6x$.

Zadanie 12.2. (0–4)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji f określonej dla każdej liczby dodatniej x .
Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że wzór funkcji f można przedstawić w postaci $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$.

2.3 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

Zadanie 1. (0–2)

Dane są liczby

$$a = 4^{\log_2 45} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{\log_3 2023}{\log_9 2023}$$

Oblicz $a - b$.

2.4 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 4. (0–3)

Wykaż, że

$$\frac{1}{\log_2 35 + 1} + \frac{1}{\log_7 140 - \log_7 2} + \frac{1}{\log_5 7 + \log_5 2 + 1} = 1$$

2.5 Poziom rozszerzony, czerwiec 2025

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $a = \log_2 14$ oraz $b = \log_{\sqrt{2}} 27$, to $\log_7 54 = \frac{b+2}{2a-2}$.

3. Funkcja kwadratowa

3.1 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 9. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (m - 4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2 \cdot x_2 + 5x_1 \cdot x_2^2$$

Zapisz obliczenia.

3.2 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$.

Zapisz obliczenia.

3.3 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

Zadanie 10. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$$

Zapisz obliczenia.

3.4 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 11. (0–5)

Funkcja kwadratowa f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem

$$f(x) = x^2 - 3x - m^2 + m + 3$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1^2 - x_2^2| \leq 12$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(3 - m) \cdot x^2 + (m + 1) \cdot x - (m + 1)^2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–6)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = (2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$$

dla każdej liczby rzeczywistej x , gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0–4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

Zapisz obliczenia.

4. Funkcje

4.1 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 7. (0–4)

Olejarnia wytwarza olej ekologiczny. Aby produkcja była opłacalna, dzienna wielkość produkcji musi wynosić co najmniej 480 litrów i nie może przekroczyć 530 litrów (ze względu na ograniczone moce produkcyjne). Przy poziomie produkcji $(480 + x)$ litrów dziennie przeciętny koszt K (w złotych) wytworzenia jednego litra oleju jest równy

$$K(x) = \frac{22x^2 - 621,5x + 23\,430}{480 + x}, \text{ gdzie } x \in [0, 50].$$

Oblicz, ile litrów oleju dziennie powinna wytworzyć olejarnia, aby przeciętny koszt produkcji jednego litra oleju był najmniejszy (z zachowaniem opłacalności produkcji). Oblicz ten najmniejszy przeciętny koszt.

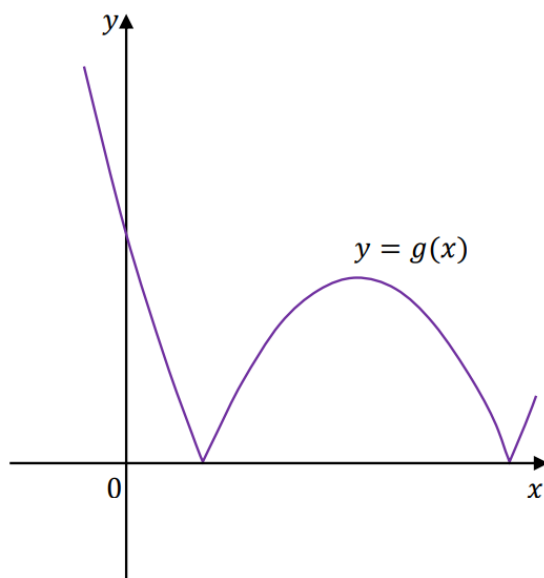
Zapisz obliczenia.

4.2 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 2.

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \left| -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 \right|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Fragment wykresu funkcji g w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku (jednostki pominięto).



Zadanie 2.1. (0–2)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje w przedziale $[9, 11]$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 2.2. (0–2)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m , dla których równanie $g(x) = |m|$ ma dokładnie dwa rozwiązania dodatnie.

4.3 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej ($t = 0$) masa substancji jest równa 4 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 19% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej).

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od 1,5 grama.

Zapisz obliczenia.

4.4 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 3. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 8}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Punkt $P = (x_0, 3)$ należy do wykresu funkcji f .

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

Zapisz obliczenia.

4.5 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

Zadanie 4. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Punkt $P = (x_0, 18)$ należy do wykresu funkcji f .

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

Zapisz obliczenia.

Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej ($t = 0$) zainicjowano pewną reakcję chemiczną, w której brał udział związek A.

W wyniku tej reakcji masa m związku A zmieniała się w czasie zgodnie z zależnością

$$m(t) = a \cdot 2^{-0,05 \cdot t} + b \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

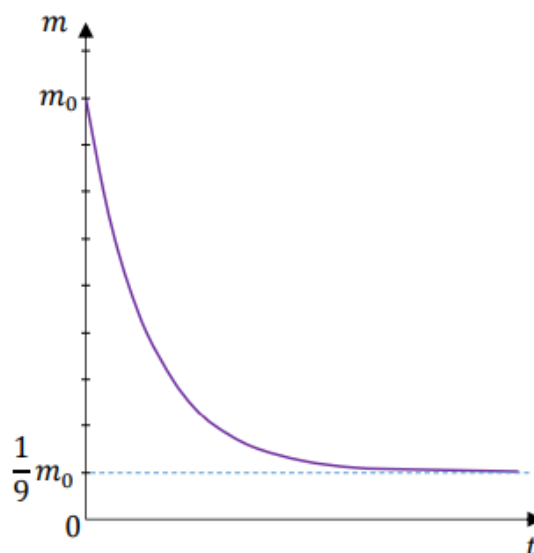
m – masa związku A wyrażona w gramach,

t – czas wyrażony w sekundach (liczony od chwili $t = 0$),

a, b – współczynniki liczbowe.

Masa początkowa związku A (tj. masa w chwili $t = 0$) była równa m_0 gramów.

Po osiągnięciu stanu równowagi (tj. gdy $t \rightarrow \infty$) masa tego związku była równa $\frac{1}{9}$ jego masy początkowej (zobacz rysunek).



Oblicz, po ilu sekundach (licząc od chwili zainicjowania tej reakcji) przereagowało 87,5 % masy początkowej tego związku. Zapisz obliczenia.

4.7 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 1. (0–2)

Ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze można opisać zależnością

$$Q(t) = Q_0 \cdot \beta^{-t} \quad \text{dla } t \geq 0$$

gdzie:

Q_0 – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili początkowej ($t = 0$)
wyrażony w milikulombach

Q – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze w chwili t (licząc od chwili
początkowej) wyrażony w milikulombach

β – stała dodatnia

t – czas wyrażony w sekundach.

Wiadomo, że w chwili $t = 4$ s w kondensatorze był zgromadzony ładunek 2 milikulombów,
a w chwili $t = 6$ s – ładunek 18 milikulombów.

**Oblicz, ile milikulombów ładunku było zgromadzone w tym kondensatorze w chwili
 $t = 5$ s. Zapisz obliczenia.**

4.8 Poziom rozszerzony, maj 2025

Zadanie 1. (0–2)

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji
pewnego gatunku bakterii. Liczebność N populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie
z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t \quad \text{dla } t \geq 0$$

gdzie:

N_0 – liczebność populacji w chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji,

k – stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków
przeprowadzenia obserwacji,

t – czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa 10 000, a po dwóch
godzinach była równa 15 625.

**Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny.
Zapisz obliczenia.**

5. Trygonometria

5.1 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 5. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$6 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x + 3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

Zapisz obliczenia.

5.2 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 6. (0–3)

Rozwiąż równanie

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$$

Zapisz obliczenia.

5.3 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

Zadanie 8. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

w zbiorze $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Zapisz obliczenia.

5.4 Poziom rozszerzony, czerwiec 2024

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

5.5 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin^4 x = \sin x \cdot \cos x - \cos^4 x$$

w zbiorze $[-\pi, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

5.6 Poziom rozszerzony, maj 2025

Zadanie 9. (0–5)

Rozwiąż równanie

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$. Zapisz obliczenia.

5.7 Poziom rozszerzony, czerwiec 2025

Zadanie 6. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$$

w przedziale $[0, \pi]$. Zapisz obliczenia.

6. Ciągi, szeregi, granice

6.1 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 10. (0–4)

Określamy kwadraty $K_1, K_2, K_3, \dots$ następująco:

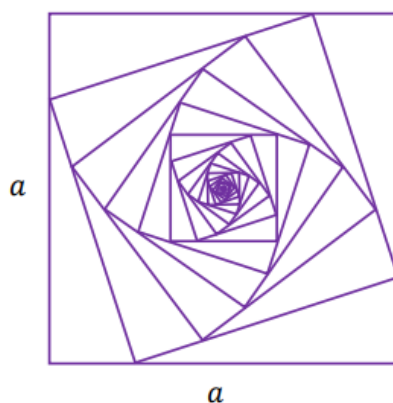
- K_1 jest kwadratem o boku długości a
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,

- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.

Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.



Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

6.2 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

Zadanie 7. (0–4)

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$2x - \frac{6x}{x-1} + \frac{18x}{(x-1)^2} - \frac{54x}{(x-1)^3} + \dots$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 1), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{15}{2}$. Zapisz obliczenia.

6.3 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

Zadanie 11. (0–5)

Ciąg (a, b, c) jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Ciąg $(2a, 2b, c + 1)$ jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym. Ponadto spełniony jest warunek $c - b = 6$.

Oblicz a , b oraz c . Zapisz obliczenia.

6.4 Poziom rozszerzony, czerwiec 2024

Zadanie 2. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x - 3|}{x^2 - 9}$$

Zapisz obliczenia.

6.5 Poziom rozszerzony, czerwiec 2024

Zadanie 7. (0–4)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych jest równa 16, tj.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots = 16$$

Ponadto $a_1 + a_3 = \frac{5}{2} \cdot a_2$.

Wyznacz wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

6.6 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 8. (0–4)

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)}{\binom{n}{2}}$$

gdzie $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ jest sumą kolejnych liczb naturalnych nieparzystych. Zapisz obliczenia.

6.7 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 10. (0–5)

Trzeci i piąty wyraz malejącego ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, spełniają warunek $a_3 + a_5 = 10$.

Trzywyrazowy ciąg $(2a_1 + 4, a_4 - 1, -\frac{1}{8}a_7)$ jest geometryczny.

Oblicz wyrazy tego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.

6.8 Poziom rozszerzony, maj 2025

Zadanie 6. (0–4)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i zbieżny.

W tym ciągu $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

6.9 Poziom rozszerzony, czerwiec 2025

Zadanie 9. (0–5)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny i rosnący. W tym ciągu $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$.

Ciąg (b_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i $b_1 = a_{11}$ oraz $b_2 = a_6$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n) . Zapisz obliczenia.

7. Kombinatoryka i prawdopodobieństwo

7.1 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 4. (0–3)

Maszyna napełnia torebki herbatą. Każda torebka ma zostać napełniona 200 g herbaty. Torebkę, która zawiera mniej niż 200 g herbaty, nazywamy torebką z niedowagą. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza torebka napełniona przez tę maszynę jest z niedowagą, jest równe 0,1. Kontrolę poddano masę herbaty w torebkach napełnianych przez tę maszynę danego dnia. Do kontroli wybrano losowo 20 torebek.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród tych 20 losowo wybranych torebek znajdą się co najwyżej dwie torebki z niedowagą.

Zapisz obliczenia. Wynik zapisz w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

7.2 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 2. (0–3)

Tomek i Romek postanowili rozegrać między sobą pięć partii szachów. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Tomka jest równe $\frac{1}{4}$.

Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

7.3 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

Zadanie 2. (0–3)

Wśród n osób są Ania i jej dwaj znajomi. Wszystkie te n osób ustawiamy w kolejkę jedna za drugą. Liczba wszystkich takich ustawień jest 12 razy większa od liczby wszystkich takich ustawień tych n osób w kolejkę, w których Ania i jej dwaj znajomi zajmują trzy kolejne miejsca (w dowolnej kolejności).

Oblicz n . Zapisz obliczenia.

7.4 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

Zadanie 3. (0–3)

Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii sieci ciepłowniczej na pewnym osiedlu mieszkaniowym w godzinach porannych pojedynczego dnia jest równe 0,1.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w okresie siedmiu dni wystąpią co najwyżej dwa takie dni, w których nastąpi awaria tej sieci na tym osiedlu w godzinach porannych. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

7.5 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 5. (0–3)

W pewnej lokalnej społeczności 35% osób ma wyższe wykształcenie. W tej społeczności językiem niemieckim dobrze włada 70% osób mających wyższe wykształcenie i 40% osób bez wyższego wykształcenia. Spośród członków tej społeczności wybieramy losowo jedną osobę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wybierzemy osobę z wyższym wykształceniem, jeżeli wiadomo, że ta osoba dobrze włada językiem niemieckim. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

7.6 Poziom rozszerzony, czerwiec 2024

Zadanie 4. (0–3)

Doświadczenie losowe polega na dziesięciokrotnym rzucie symetryczną monetą.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tym doświadczeniu losowym orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu, jeśli wiadomo, że wypadł dokładnie trzy razy. Zapisz obliczenia.

7.7 Poziom rozszerzony, maj 2025

Zadanie 4. (0–3)

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek. Zapisz obliczenia.

7.8 Poziom rozszerzony, czerwiec 2025

Zadanie 1. (0–3)

Sklep AGD prowadzi sprzedaż wysyłkową pralek. Prawdopodobieństwo uszkodzenia podczas transportu pralki wysłanej przez ten sklep do klienta jest równe 0,02.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że spośród 10 pralek wysłanych dziesięciu klientom przez ten sklep co najwyżej jedna ulegnie uszkodzeniu podczas transportu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

7.9 Poziom rozszerzony, czerwiec 2025

Zadanie 3. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne sześciocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym iloczyn cyfr jest liczbą parzystą mniejszą od 5.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb sześciocyfrowych. Zapisz obliczenia.

8. Planimetria

8.1 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 6. (0–4)

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przecinające boki BC , AC i AB tego trójkąta w punktach – odpowiednio – K , L oraz M . Punkt P jest punktem przecięcia tych dwusiecznych. Na czworokątach $CLPK$ oraz $BKPM$ można opisać okrąg.

Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.

8.2 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 11. (0–5)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $|AB| > |CD|$ oraz ramię BC ma długość 6. Na tym trapezie opisano okrąg o promieniu $R = 5$. Miary kątów BAC i ABC tego trapezu spełniają warunek

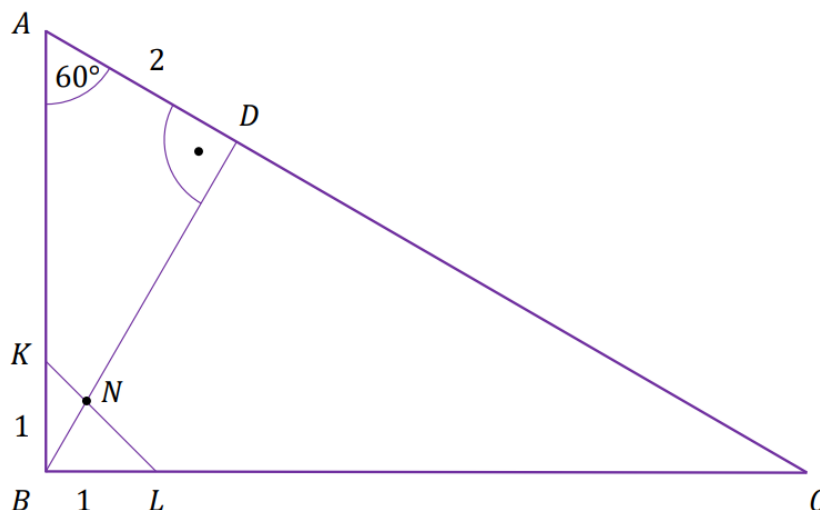
$$\frac{\sin|\sphericalangle BAC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = \frac{5}{8}$$

Oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0–3)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle CAB| = 60^\circ$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N , a ponadto $|AD| = 2$.



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

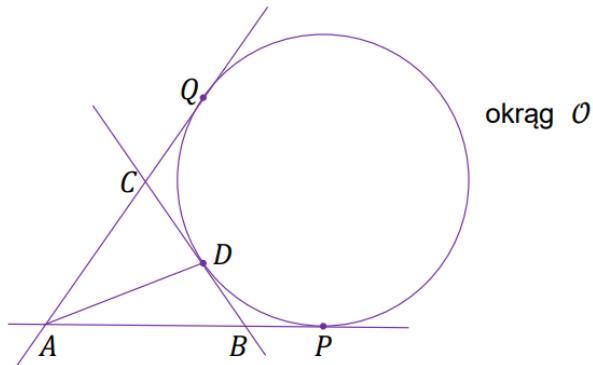
Zadanie 8. (0–4)

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 4$ i $|CD| = 5$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego czworokąta tworzy z bokiem BC kąt o mierze 60° , natomiast z bokiem AB – kąt ostry, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$.

Oblicz obwód czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–3)

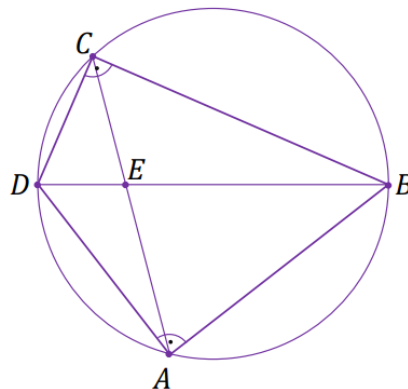
Dany jest okrąg $\mathcal{O}$. Przez punkt A poprowadzono dwie proste, które są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – P oraz Q . Przez punkt B leżący na odcinku AP poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie D , która przecięła odcinek AQ w punkcie C (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $|AQ| = 5 \cdot |BP|$ oraz $|CD| = 2 \cdot |BD|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 12. (0–5)

Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Kąty BAD i BCD są proste (zobacz rysunek). Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie E tak, że $|BE| = 3 \cdot |DE|$ oraz $|BD| = 2 \cdot |AE|$.



Oblicz długości boków czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

8.7 Poziom rozszerzony, czerwiec 2024

Zadanie 6. (0–3)

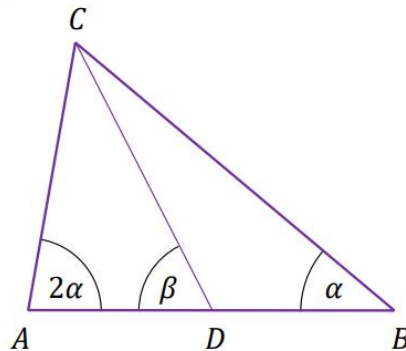
Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe a oraz b , przy czym $a > b$. W ten trapez można wpisać okrąg.

Wykaż, że pole tego trapezu jest większe od $a \cdot b$.

8.8 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 12. (0–5)

W trójkącie ostrokątnym ABC miara kąta BAC jest dwa razy większa od miary kąta ABC . Punkt D jest środkiem boku AB . Niech α oznacza miarę kąta ABC , natomiast β – miarę kąta ADC (zobacz rysunek).



Oblicz $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\alpha)}$. Zapisz obliczenia.

8.9 Poziom rozszerzony, maj 2025

Zadanie 7. (0–4)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt E jest środkiem ramienia AD , a punkt F jest środkiem ramienia BC trapezu. Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$.

Wykaż, że $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$.

8.10 Poziom rozszerzony, czerwiec 2024

Zadanie 8. (0–4)

W okrąg o promieniu 4 wpisano trójkąt ABC . Długość boku AB jest równa 6. Bok BC ma długość $4\sqrt{3}$ i jest najdłuższym bokiem tego trójkąta.

Oblicz długość boku AC trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

8.11 Poziom rozszerzony, maj 2025

Zadanie 3. (0–3)

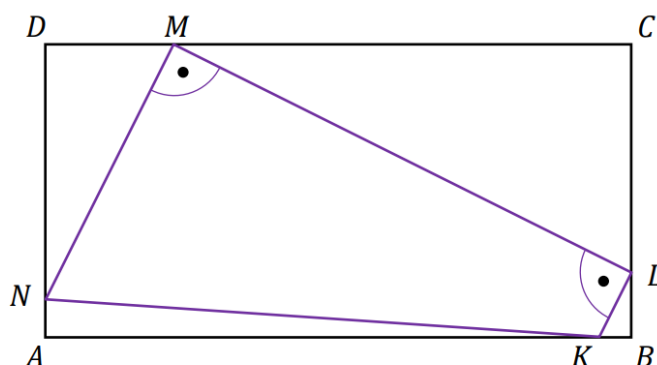
W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku BC . Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Oblicz miarę kąta DAC . Zapisz obliczenia.

8.12 Poziom rozszerzony, czerwiec 2025

Zadanie 4. (0–3)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 2 \cdot |AD|$. Na bokach AB , BC , CD oraz DA tego prostokąta obrano punkty – odpowiednio – K , L , M oraz N (przy czym każdy z tych punktów leży na dokładnie jednym boku prostokąta $ABCD$). Czworokąt $KLMN$ jest trapezem prostokątnym (zobacz rysunek), a wysokość LM tego trapezu jest równoległa do przekątnej BD prostokąta.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16.

8.13 Poziom rozszerzony, czerwiec 2025

Zadanie 7. (0–4)

Na czworokącie wypukłym $ABCD$ o bokach długości: $|AB| = 3$, $|BC| = 3$, $|CD| = 5$ oraz $|DA| = 8$, opisano okrąg.

Oblicz promień tego okręgu. Zapisz obliczenia.

9. Analityczna

9.1 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 12. (0–6)

Prosta k o równaniu $x + y - 9 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ w punktach A oraz B . Pierwsza współrzędna punktu A jest liczbą dodatnią; pierwsza współrzędna punktu B jest liczbą ujemną. Prosta l jest równoległa do prostej k i styczna do danej paraboli w punkcie C .

Oblicz odległość punktu C od prostej k oraz pole trójkąta ABC .

Zapisz obliczenia.

9.2 Poziom rozszerzony, czerwiec 2023

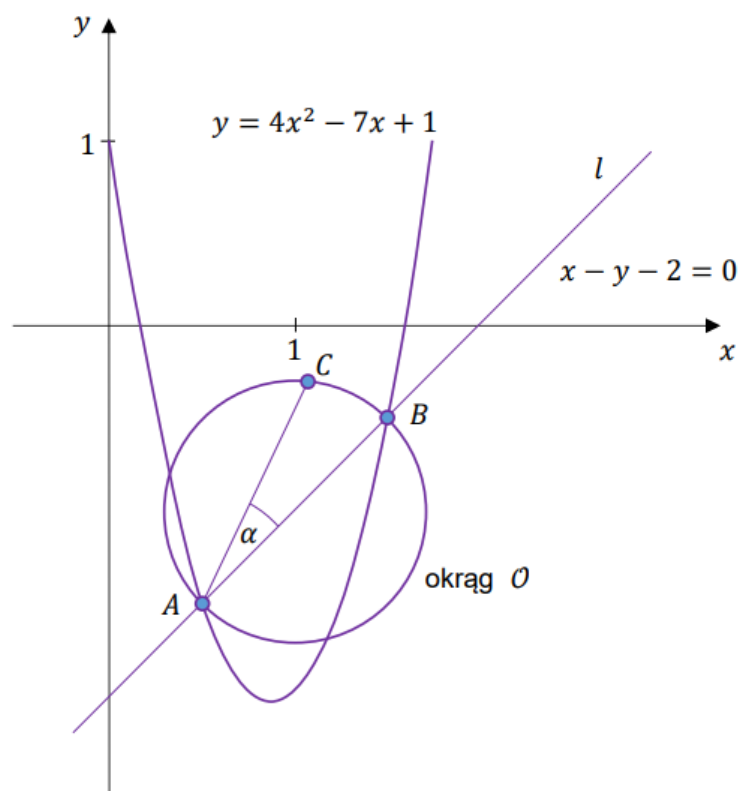
Zadanie 9. (0–4)

W okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ wpisano trójkąt ABC . Bok AB tego trójkąta jest zawarty w prostej o równaniu $4x - 3y + 2 = 0$. Wysokość CD tego trójkąta dzieli bok AB tak, że $|AD| = 4 \cdot |DB|$.

Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta l o równaniu $x - y - 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = 4x^2 - 7x + 1$ w punktach A oraz B . Odcinek AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$. Punkt C leży na okręgu $\mathcal{O}$ nad prostą l , a kąt BAC jest ostry i ma miarę α taką, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).



Oblicz współrzędne punktu C . Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $P = (x_0, 5)$ należy do wykresu funkcji f .

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P . Zapisz obliczenia.

9.5 Poziom rozszerzony, czerwiec 2024

Zadanie 11. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $3x + y + 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 - 2x - 8$ w punktach A oraz B , które są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek A ma pierwszą współrzędną ujemną. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią. Odległość punktu C od prostej zawierającej bok AB równoległoboku jest równa $\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

Oblicz długość boku BC tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.

9.6 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 2. (0–2)

Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz przecina bok AB tego trójkąta w punktach M oraz N , przy czym $0 < |AM| < |AN| < |AB|$.

Wykaż, że jeśli $|AM| = |BN|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

9.7 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 7. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są:
okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 50$ i punkty $A = (6, 4)$ oraz $B = (-6, 8)$.
Punkt C leży na tym okręgu i $|AC| = |BC|$.

Oblicz współrzędne punktu C . Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

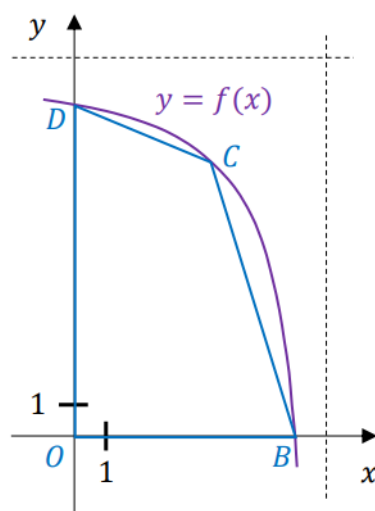
Zadanie 13.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{12x-84}{x-8}$ dla każdego $x \in (-\infty, 8)$.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) rozważamy wszystkie czworokąty $OBCD$, w których:

- wierzchołek O ma współrzędne $(0, 0)$
- wierzchołki B oraz D są punktami przecięcia wykresu funkcji f z osią – odpowiednio – Ox i Oy
- wierzchołek C ma obie współrzędne dodatnie i leży na wykresie funkcji f

(zobacz rysunek).



Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że pole P czworokąta $OBCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Pole P czworokąta $OBCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej x punktu C jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2 - 56}{x - 8}$$

dla $x \in (0, 7)$.

Oblicz współrzędne wierzchołka C , dla których pole czworokąta $OBCD$ jest największe. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi $\mathcal{O}_1$ oraz $\mathcal{O}_2$ o równaniach:

- $\mathcal{O}_1: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$
- $\mathcal{O}_2: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$.

Te okręgi przecinają się w punktach A oraz B . Punkt A ma pierwszą współrzędną dodatnią. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$.

Oblicz współrzędne punktów A , B oraz M . Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

Wielomian f zmiennej rzeczywistej x jest określony wzorem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Liczba (-2) jest miejscem zerowym tego wielomianu. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) styczna do wykresu wielomianu f w punkcie A o pierwszej współrzędnej równej (-2) przecina ten wykres w punkcie $P = (1, 9)$.

Wyznacz wzór wielomianu f . Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest równoległobok $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-8, -1)$ i $D = (-13, 9)$ oraz środka symetrii $M = \left(-\frac{9}{2}, 1\right)$. Okrąg $\mathcal{O}$ przechodzi przez początek tego układu i jest styczny do prostych zawierających boki AB i BC tego równoległoboku. Druga współrzędna środka okręgu $\mathcal{O}$ jest liczbą ujemną.

Wyznacz równanie okręgu $\mathcal{O}$. Zapisz obliczenia.

10. Bryły

10.1 Poziom rozszerzony, grudzień 2022

Zadanie 10. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o podstawie $ABCD$. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość a . Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α takim, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Przez krawędź BC podstawy ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę π prostopadłą do ściany bocznej SAD .

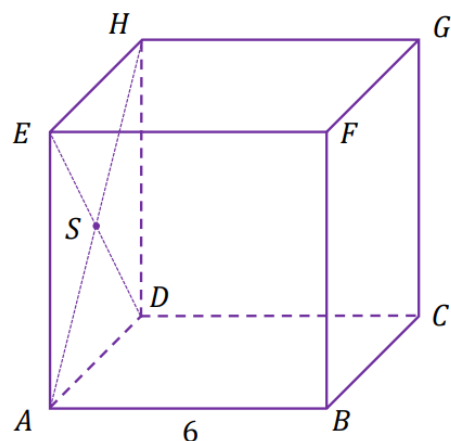
Sporządź rysunek tego ostrosłupa, zaznacz na rysunku przekrój wyznaczony przez płaszczyznę π i nazwij figurę, która jest tym przekrojem. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zapisz obliczenia.

10.2 Poziom rozszerzony, maj 2023

Zadanie 7. (0–4)

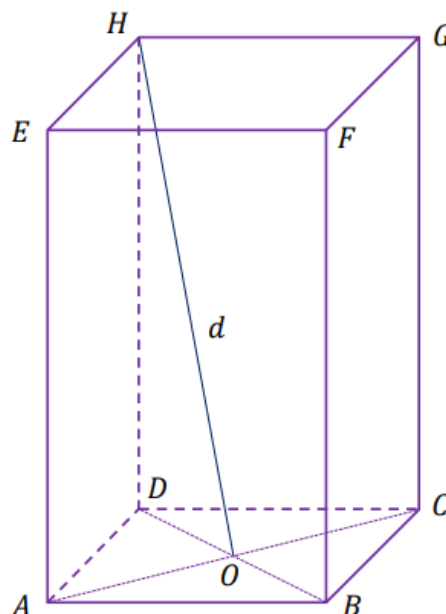
Dany jest sześcián $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0–6)

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne $ABCDEFGH$, w których odcinek łączący punkt O przecięcia przekątnych AC i BD podstawy $ABCD$ z dowolnym wierzchołkiem podstawy $EFGH$ ma długość d (zobacz rysunek).



- Wyznacz zależność objętości V graniastosłupa od jego wysokości h i podaj dziedzinę funkcji $V(h)$.
- Wyznacz wysokość tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–4)

Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa a . Sinus kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka graniastosłupa jest równy $\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

10.5 Poziom rozszerzony, czerwiec 2024

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma wysokości H ostrosłupa oraz promienia R okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa jest równa 6.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V każdego z takich ostrosłupów w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Objętość V ostrosłupa w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

dla $R \in (0, 6)$.

Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na podstawie tego z rozważanych ostrosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

10.6 Poziom rozszerzony, grudzień 2024

Zadanie 3. (0–3)

Iloczyn długości średnicy podstawy walca i wysokości walca jest równy $12\sqrt{3}$.

Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe $12\pi(\sqrt{3} + 1)$.

Oblicz objętość tego walca. Zapisz obliczenia.

10.7 Poziom rozszerzony, maj 2025

Zadanie 10. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$.

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

Zadanie 12.2. (0–4)

Objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

dla $h \in (5, +\infty)$.

Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą objętość. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCD$ o podstawie ABC . Płaszczyzna zawierająca krawędź AB podstawy i prostopadła do krawędzi bocznej CD przecina tę krawędź w punkcie E , przy czym $\frac{|CE|}{|DE|} = \frac{3}{11}$.

Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego ostrosłupa do pola podstawy ABC . Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o polu powierzchni całkowitej równym $24\sqrt{3}$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

Zadanie 12.2. (0–4)

Objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

dla $a \in (0, 4\sqrt{3})$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.