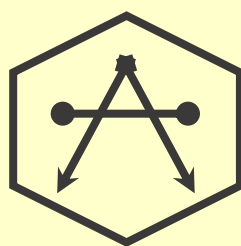


Sebastian Warchoń

MIŁA, SŁODKA I UROCZA KSIĄŻKA O MATEMATYCE

Dla uczniów szkół średnich

Poziom podstawowy



Sebastian
Warchoń
Korepetycje

Podziękowania

Serdeczne podziękowania kieruję do wszystkich osób, które wspierały mnie na drodze do stworzenia tej książki.

Dziękuję moim uczniom – za setki pytań, które motywowały mnie do ciągłej pracy, pomagając mi zrozumieć czego potrzebują młodzi ludzie.

Dziękuję wszystkim tym, na których zawsze mogłem polegać – za ich nieocenione rady, wsparcie i konstruktywną krytykę, która pozwalała mi spojrzeć na swoje pomysły z nowej perspektywy.

Dziękuję kolektywowi 111 – za cierpliwość w odpowiadaniu na moje pytania i za konstruktywną krytykę, na którą zawsze mogłem liczyć.

Bez Was ta książka by nie powstała. Dziękuję z całego serca.

Sebastian

Spis treści

1. Powtórzenie.....	5
❖ Wzory skróconego mnożenia	5
❖ Pierwiastki	5
❖ Wartość bezwzględna	6
❖ Własności funkcji	6
❖ Przydatne materiały YT.....	7
2. Funkcja kwadratowa.....	8
❖ Postaci funkcji kwadratowej	8
• Postać ogólna.....	8
➤ Delta, miejsca zerowe.....	9
• Postać kanoniczna	10
➤ Wierzchołek	10
• Postać iloczynowa.....	12
• Podsumowanie	12
❖ Odczytywanie wzoru funkcji z wykresu	13
❖ Nierówności kwadratowe	14
❖ Rozwiązywanie układów równań drugiego stopnia.....	15
❖ Zastosowanie funkcji kwadratowej	15
• Dziedzina funkcji.....	15
• Wartość największa i najmniejsza w przedziale.....	16
• Równanie dwukwadratowe	17
❖ Optymalizacja	19
3. Wielomiany.....	21
❖ Działania na wielomianach.....	21
• Dodawanie, odejmowanie.....	21
• Mnożenie	21
❖ Wzory skróconego mnożenia	22
❖ Rozkład wielomianu na czynniki	25
❖ Równania wielomianowe	25
❖ Twierdzenie Bézouta.....	25
4. Funkcja wymierna.....	26
❖ Wprowadzenie.....	26
❖ Wykres funkcji. Asymptoty. Własności funkcji odczytywane z wykresu.....	26
❖ Przesunięcie wykresu funkcji	28

❖ Działania na liczbach wymiernych.....	29
• Dodawanie.....	29
• Odejmowanie	30
• Mnożenie	30
• Dzielenie	30
• Skracanie wyrażeń wymiernych.....	31
❖ Równania wymierne	31
❖ Równania z wartością bezwzględną	32
5. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.....	34
❖ Powtórka z potęg.....	34

1. Powtórzenie po szkole podstawowej

❖ Wzory skróconego mnożenia

Najczęściej używamy trzech wzorów skróconego mnożenia.

$$\text{I. } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (x + \sqrt{2})^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$$

$$\text{II. } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - \sqrt{6}$$

$$\text{III. } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$$

Wzory skróconego mnożenia działają w obie strony. Bardzo często przydaje się trzeci wzór skróconego mnożenia. Na przykład:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

Kiedy wynik mnożenia wynosi 0? Kiedy mnożymy przez 0!

$$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$$x = 2 \vee \quad x = -2$$

$$x \in \{-2, 2\}$$

Bardzo pomocna opcja przy funkcji kwadratowej.

❖ Pierwiastki

Działania na pierwiastkach

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{1} = 1, \text{ bo } 1^2 = 1$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} \neq \sqrt{3+3}$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ bo } 0^2 = 0$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{8} + \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Usuwanie niewymierności

Jeśli mamy tylko pierwiastek w mianowniku, mnożymy licznik i mianownik przez ten pierwiastek. W praktyce mnożymy razy 1, bo $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{10}}{5}$$

Gdy w mianowniku mamy pierwiastek i liczbę, korzystamy z trzeciego wzoru skróconego mnożenia.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}+3}{5-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{2}$$

❖ Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna (moduł) to odległość liczby od 0 na osi liczbowej. Inaczej mówiąc to sama liczba, bez minusa. Dlatego potocznie mówi się, że moduł może być nieodwracający (nic nie zmienia), na przykład $|5| = 5$ albo odwracający (zmieniający ujemną na dodatnią), na przykład $|-5| = 5$. Warto zauważyć, że $|5| = |-5|$.

Przykład 1. $|x| = 7$

Co musimy wstawić w moduł, żeby wynik wynosił 7? Mamy dwie możliwości, albo moduł jest nieodwracający i w środku jest 7, albo moduł jest odwracający i w środku jest -7. Możemy zapisać:

$$x = 7 \vee x = -7$$

$$x \in \{-7, 7\}$$

Przykład 2. $|x - 5| = 3$

Co musimy wstawić w moduł, żeby wynik wynosił 3? Mamy dwie możliwości, albo moduł jest nieodwracający i w środku jest 3, albo moduł jest odwracający i w środku jest -3. Możemy zapisać:

$$x - 5 = 3 \vee x - 5 = -3$$

$$x = 8 \vee x = 2$$

$$x \in \{2, 8\}$$

❖ Własności funkcji

X to **argumenty** funkcji. **Y** to **wartości** funkcji.

Dziedzina – to zbiór x (argumentów) dla których funkcja istnieje. Wynika ona

- a) Z zasad matematyki (głównie funkcje liczbowe)
 - Nie wolno dzielić przez 0.
 - Nie wolno pod pierwiastkiem parzystego stopnia wstawiać liczby ujemnej.
- b) Ze zdrowego rozsądku (głównie zadania z treścią)
 - Czy możemy podstawić liczbę ujemną?
 - Czy możemy podstawić ułamek?
 - Czy możemy podstawiać tylko liczby całkowite?

Robimy zakupy na naleśniki. Czy możemy kupić pół jajka? Nie. Czy możemy kupić pół kilograma mąki? Tak. Czy możemy kupić ujemną liczbę jajek? Nie.

Zbiór wartości – zbiór y (wartości) jakie funkcja przyjmuje.

Miejsce zerowe – wartość dla której funkcja przyjmuje wartość 0. Graficznie to punkt przecięcia wykresu z osią OX.

Monotoniczność – mądre określenie czy funkcja rośnie, czy maleje i dla jakiego przedziału wartości.

❖ Przydatne materiały YT

Dziedzina funkcji



Własności funkcji



Moduł wprowadzenie



Moduł zadania



2. Wprowadzenie. Podstawowe pojęcia

3. Funkcja kwadratowa

Najpowszechniejszą postacią funkcji kwadratowej jest jej **postać ogólna**:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Najważniejszą sprawą jest to, że $a \neq 0$, żeby ax^2 się nie wyzerowało. Wtedy zostałyby nam sama funkcja liniowa. Nazwa funkcja kwadratowa pochodzi od tego, że x jest podniesiony do kwadratu. Inaczej można by ją nazwać funkcją drugiego stopnia (funkcje nazywamy od najwyższej potęgi do której podniesiony jest x) albo trójmianem kwadratowym (bo składa się z trzech jednomianów, stąd trójmian).

Oprócz postaci ogólnej funkcję kwadratową możemy zapisać w postaci iloczynowej i kanonicznej. To ciągle ta sama funkcja, tylko zapisana w inny sposób. Każdy zapis ma inne zalety i łatwo w nim zauważyć różne rzeczy.

❖ Postaci funkcji kwadratowej

- Postać ogólna

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Każda funkcja kwadratowa ma postać ogólną i współczynniki a , b i c , nawet jeśli na pierwszy rzut oka ich nie widać. Spójrzmy na funkcję:

$$f(x) = x^2 - 5$$

Ten przykład zawiera prawie wszystkie złośliwości, jakie mogłem umieścić w postaci ogólnej. Łatwo pomylić się w nim, mówiąc że nie ma a , nie ma b , $c = 5$. Równie dobrze można by zapisać:

$$f(x) = 1x^2 + 0x - 5$$

Jeśli przed x^2 nie stoi żadna liczba, to znaczy że mamy jedno x^2 . Czyli $a = 1$.

Jeśli nie mamy zapisanego żadnego x , czyli mamy ukryte $0x$. To znaczy, że $b = 0$.

Odczytując współczynniki trzeba pamiętać o znakach. W tym przykładzie $c = -5$.

Dla poznania kompletu złośliwostek, spójrzmy na drugi przykład:

$$f(x) = -x^2 + 7x$$

Ile tutaj mamy x^2 ? Znow przed x^2 nie ma żadnej liczby, jest tylko minus. Równie dobrze moglibyśmy zapisać:

$$f(x) = -1x^2 + 7x + 0$$

Te zera i jedynki których nie zapisujemy trzeba sobie wyobrazić. Wtedy widać, że:

$$a = -1, \quad b = 7, \quad c = 0$$

➤ Delta, miejsca zerowe

Niektóre funkcje kwadratowe mają miejsca zerowe, inne nie. To zależy od delty.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Gdy już policzymy deltę, mamy 3 możliwości:

1. $\Delta > 0$, wtedy są 2 miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

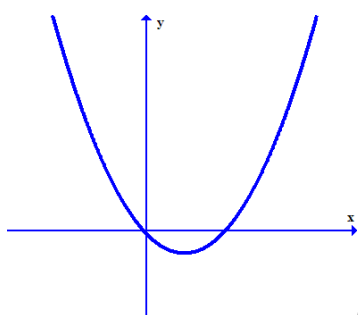
2. $\Delta = 0$, wtedy jest jedno miejsce zerowe

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

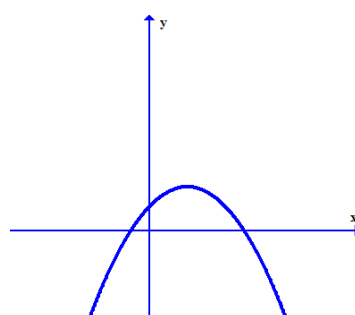
Nowym wzorem się nie przejmuj, bo jeśli $\Delta = 0$, wtedy $\sqrt{\Delta} = 0$, czyli podstawiasz 0 do wcześniejszych wzorów.

3. $\Delta < 0$, wtedy nie ma miejsc zerowych

$a > 0$, to ramiona są skierowane do góry, jeśli $a < 0$, ramiona są skierowane w dół.



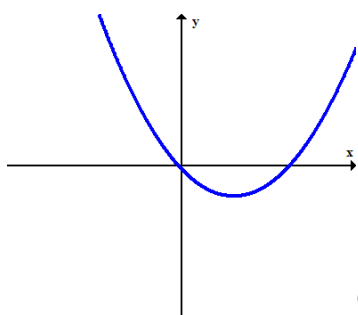
$a > 0$



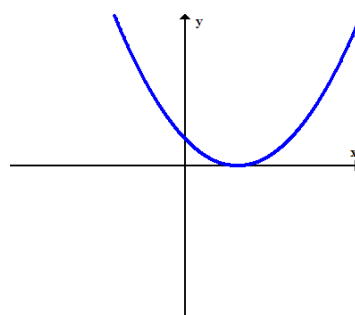
$a < 0$

a jest tą samą liczbą we wszystkich postaciach

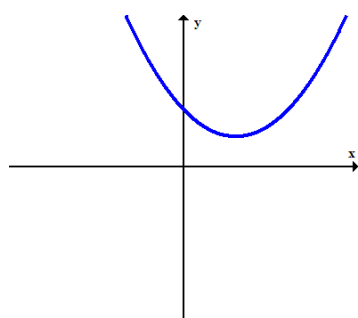
Podsumujmy dotychczasowe informacje na obrazkach:



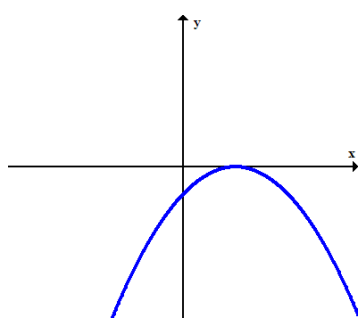
$a > 0$
 $\Delta > 0$



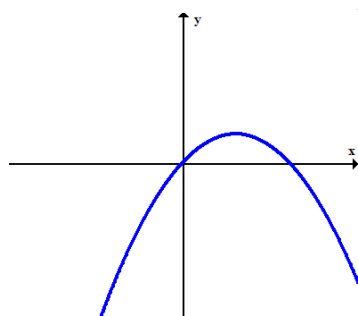
$a > 0$
 $\Delta = 0$



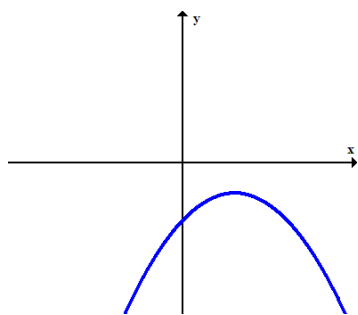
$$a > 0 \\ \Delta < 0$$



$$a < 0 \\ \Delta = 0$$



$$a < 0 \\ \Delta > 0$$



$$a < 0 \\ \Delta < 0$$

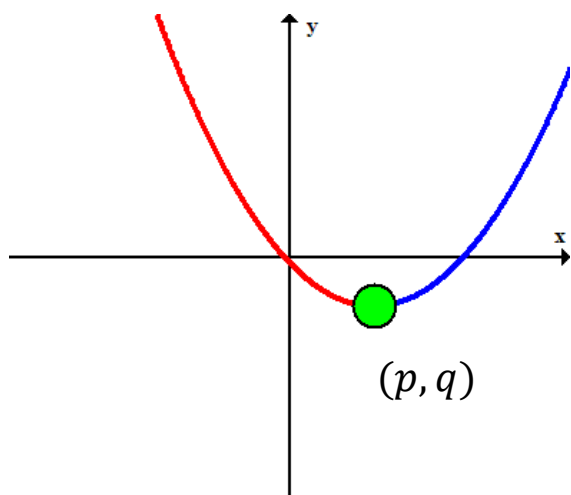
- **Postać kanoniczna**

Mając postać kanoniczną mamy tam od razu wierzchołek. Każda funkcja kwadratowa ma swoją postać kanoniczną.

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Postać kanoniczna jest przesunięciem wektorowym funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor $[p, q]$.

➤ **Wierzchołek**



Każda funkcja kwadratowa ma wierzchołek. Jest to punkt o współrzędnych (p, q) . Każdy punkt ma x i y , czyli p jest x , q to y .

$$p = \frac{-b}{2a}$$

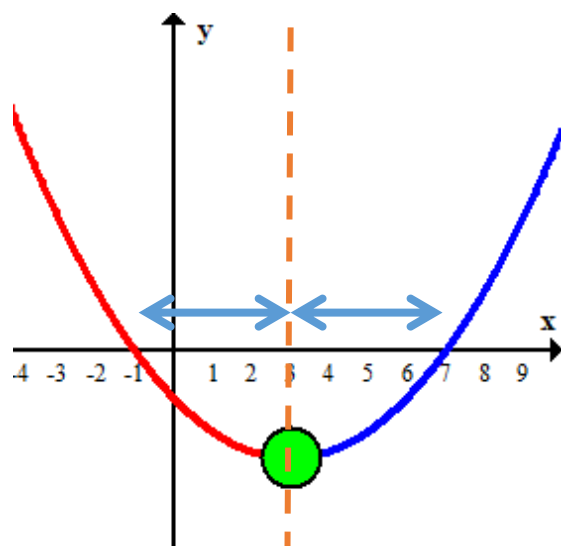
Wzory na współrzędne wierzchołka łatwo zapamiętać, jest on identyczny jak wzór na miejsce zerowe funkcji kwadratowej, gdy $\Delta = 0$. Najłatwiej skojarzyć sobie:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_0 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow p = \frac{-b}{2a}
 \end{aligned}$$

dwa miejsca zerowe *jedno miejsce zerowe* *p czyli x wierzchołka*

Warto zauważyć jeszcze jedną rzecz, która może się czasem przydać. Każda funkcja kwadratowa ma oś symetrii. Lewe ramię (czerwone) i prawe ramię (niebieskie) mają taki sam kształt. To znaczy, że wierzchołek leży dokładnie pomiędzy miejscami zerowymi (o ile istnieją). Jeśli znamy miejsca zerowe, możemy szybko policzyć p.

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



Spójrzmy na przykład:

Miejscami zerowymi są -1 i 7. Co jest po środku pomiędzy tymi liczbami?

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Dla każdej funkcji możemy zapisać:

$$y = f(x)$$

Stąd możemy łatwo policzyć q, po prostu podstawiając p za x.

$$q = f(p)$$

Jak na matematykę przystało, jest też trudniejszy sposób. Wystarczy zapamiętać kolejny wzór:

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Per aspera ad astra. Przez cierpienie do gwiazd.

- Postać iloczynowa

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Nie każda funkcja kwadratowa ma postać iloczynową, postać iloczynowa istnieje tylko wtedy kiedy funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe w (jedno albo dwa).

Tak wygląda postać iloczynowa funkcji, która ma dwa miejsca zerowe.

$$a = 2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -3,$$

$$f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$$

Tak wygląda postać iloczynowa funkcji, która ma dwa jedno miejsce zerowe. Samo to stwierdzenie, że mamy jedno miejsce zerowe jest małym niedopowiedzeniem. Tak naprawdę to jest podwójne miejsce zerowe. Tak naprawdę ta funkcja ma dwa razy to samo miejsce zerowe. Brzmi skomplikowanie? Być może. Czy to teraz powinno nas martwić? Nie. Będziemy się tym martwić dopiero przy wielomianach.

$$a = 1, x_1 = -3, \quad x_2 = -3,$$

$$f(x) = 1(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

Jeśli mamy daną funkcję w postaci iloczynowej, możemy od razu odczytać jej miejsca zerowe. Możemy też rozwiązać równanie. Mając mnożenie dwóch rzeczy, to albo jedna, albo druga z nich musi być zerem.

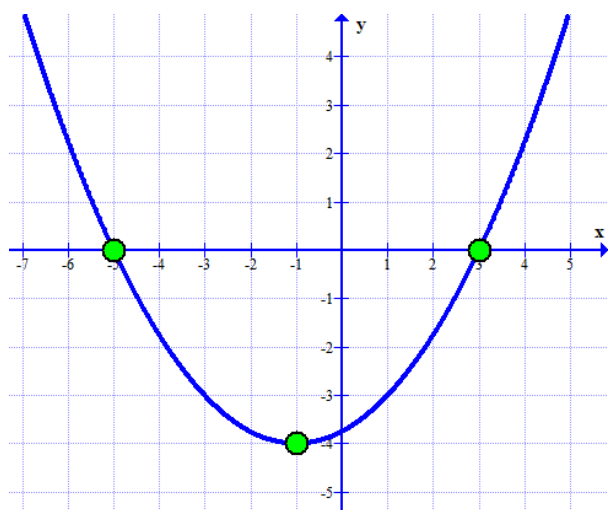
$$2(x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0$$

- Podsumowanie

Postać ogólna	Postać kanoniczna	Postać iloczynowa
Zalety: łatwo policzyć deltę	Zaleta: łatwo odczytać wierzchołek	Zaleta: łatwo odczytać miejsca zerowe Uwaga: Nie zawsze istnieje
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a(x - p)^2 + q$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
$f(x) = x^2 - 4x - 5$	$f(x) = (x - 2)^2 - 9$	$f(x) = (x - 5)(x + 1)$

❖ Odczytywanie wzoru funkcji z wykresu



Wartości odczytane z wykresu:

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 3$$

$$p = -1$$

$$q = -4$$

Na podstawie rzeczy, które odczytaliśmy z wykresu, możemy zacząć pisać postaci iloczynową i kanoniczną:

$$f(x) = a(x + 5)(x - 3)$$

$$f(x) = a(x + 1)^2 - 4$$

Nie znamy a . Możemy obliczyć je na dwa sposoby.

I sposób

Napisaliśmy postać iloczynową używając miejsc zerowych. Nie użyliśmy jeszcze wierzchołka. Więc podstawmy sobie współrzędne wierzchołka do postaci iloczynowej:

$$f(-1) = a(-1 + 5)(-1 - 3)$$

$$a(-1 + 5)(-1 - 3) = -4$$

$$a \cdot 4 \cdot (-4) = -4$$

$$-16a = -4$$

$$a = \frac{1}{4}$$

II sposób

Napisaliśmy postać kanoniczną używając wierzchołka. Nie użyliśmy jeszcze miejsc zerowych. Więc podstawiamy sobie współrzędne dowolnego miejsca zerowego do postaci kanonicznej:

$$f(3) = a(3 + 1)^2 - 4$$

$$a(3 + 1)^2 - 4 = 0$$

$$a \cdot 4^2 - 4 = 0$$

$$16a = 4$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Obie drogi prowadzą nas do dobrych odpowiedzi:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x + 5)(x - 3)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 4$$

By policzyć postać ogólną, znów mamy dwie drogi.

I sposób

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+5)(x-3)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 3x + 5x - 15)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 15)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}$$

II sposób

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 4$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1) - 4$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - 4$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4}$$

Jak widzisz, każda droga prowadzi nas do dobrej odpowiedzi. Specjalnie pokazuję dwa sposoby, bo nie można powiedzieć, że któryś jest lepszy albo gorszy. Pytanie, czy lepiej korzystać z postaci iloczynowej, czy kanonicznej to jak pytanie o to, które lody są lepsze, czekoladowe czy truskawkowe. To kwestia gustu, jedni wolą mnożenie nawiasów, inni wzory skróconego mnożenia.

❖ Nierówności kwadratowe

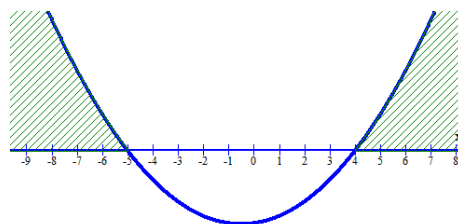
Do rozwiązywania nierówności kwadratowych najłatwiej naszkicować wykres funkcji. Nie potrzebujemy do tego dokładnego wykresu, wystarczy tylko oś OX z zaznaczonymi miejscami zerowymi.

Przykład 1

$$2(x-4)(x+5) \geq 0$$

Odczytujemy miejsca zerowe, szkicujemy wykres. Ramiona są do góry. Dokładnym kształtem się nie przejmujemy. Pisząc odpowiedź pamiętamy o znakach:

$$x \in (-\infty, -5] \cup [4, \infty)$$

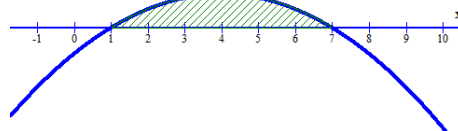


Przykład 2

$$-3(x-1)(x-7) > 0$$

Tym razem ramiona są do dołu i nawiasy otwarte:

$$x \in (1, 7)$$



Przykład 3

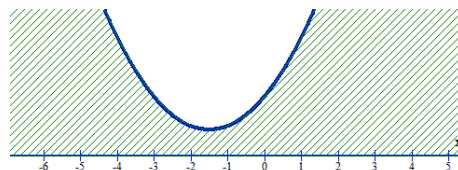
$$x^2 + 3x + 4 > 0$$

Żeby naszkicować wykres funkcji liczymy deltę.

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$$

Ponieważ delta jest ujemna, ta funkcja nie ma miejsc zerowych. Jej ramiona są do góry, więc jest nad osią. To oznacza że dla każdego x jej wartość jest dodatnia

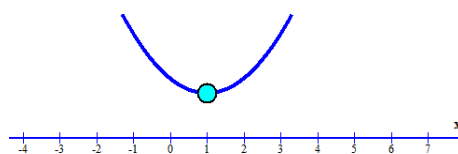
$$x \in R$$



Przykład 4

$$2(x - 1)^2 + 3 < 0$$

Ten przykład tylko pozornie wygląda na trudny. Moglibyśmy przekształcić go do postaci ogólnej, policzyć deltę i znaleźć ewentualne miejsca zerowe. Ale zanim udamy się w tą męczącą podróż, zobaczmy co już wiemy. Możemy odczytać współrzędne wierzchołka i wiemy, że ramiona są do góry. Naszkicujmy to. Czy ta funkcja kiedykolwiek przyjmuje wartości ujemne? Nie. Zapisujemy więc, że x należy do (zbioru) pustego.

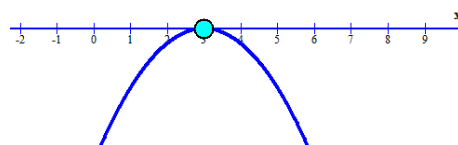


$$x \in \emptyset$$

Przykład 5

$$-(x - 3)^2 \geq 0$$

Znow mamy postać kanoniczną (albo iloczynową). Naszkicujmy wykres tej funkcji. Czy ta funkcja kiedykolwiek jest dodatnia? Nie. Czy ta funkcja przyjmuje wartość 0? Tak, dla trójki. Czyli nasza odpowiedź to:



$$x = 3$$

❖ Rozwiązanie układów równań drugiego stopnia

Rozwiązując układ równań, należy pamiętać, że mamy dwie niewiadome do obliczenia. Odpowiedzią jest para liczb, które możemy zapisać jako punkt, albo jako użyć klamerek. Przykładowo, jeśli obliczyliśmy, że $x = 2$ i $y = 4$, wtedy możemy zapisać odpowiedź na dwa sposoby

$$\text{I sposób: } (2, 4) \quad \text{II sposób: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

❖ Zastosowanie funkcji kwadratowej

• Dziedzina funkcji

Matematyka ma dwie podstawowe zasady

- 1) Nie wolno dzielić przez zero.

Weźmy przykładową funkcję $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+5)}$. Ponieważ nie możemy dzielić przez 0, czyli mianownik musi być różny od 0. Możemy to zapisać:

$$(x - 2)(x + 5) \neq 0$$

Rozwiązując tą nierówność, trzeba pamiętać że skoro wynik mnożenia nie może wyjść 0, to w pierwszym nawiasie i w drugim nawiasie nie może być 0. Jeśli którykolwiek nawias będzie zerem, wtedy wynik mnożenia będzie zerem. To doprowadziłoby do końca świata.

$$x - 2 \neq 0 \wedge x + 5 \neq 0$$

$$x \neq 2 \wedge x \neq -5$$

To znaczy, że za x możemy podstawić każdą liczbę, oprócz 2 i -5. Możemy więc zapisać:

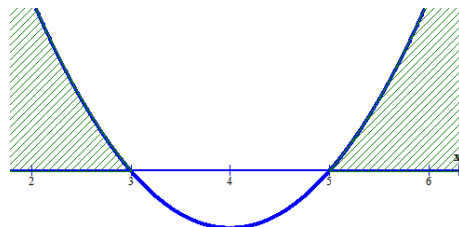
$$x \in R \setminus \{-5, 2\}$$

2) Pod pierwiastkiem nie może być liczba ujemna.

Weźmy przykładową funkcję $f(x) = \sqrt{(x-3)(x-5)}$. Ponieważ pod pierwiastkiem nie może być liczba ujemna, czyli to co mamy pod pierwiastkiem musi być dodatnie albo równe 0. Możemy to zapisać:

$$(x-3)(x-5) \geq 0$$

Rozwiązujemy tą nierówność korzystając ze szkicu funkcji kwadratowej. Ramiona do góry, miejsca zerowe to 3 i 5.



$$x \in (-\infty, 3] \cup [5, \infty)$$

• Wartość największa i najmniejsza w przedziale

Gdy chcemy znaleźć największą (albo najmniejszą) wartość funkcji w przedziale, zawsze musimy zrobić dwie rzeczy:

- Sprawdzić wartość na początku i końcu przedziału
- Znaleźć p wierzchołka

Te dwa kroki są obowiązkowe. Dopiero jeśli wierzchołek należy do przedziału, szukamy q. Rozpatrzmy sobie dwa przykłady.

Przykład 1

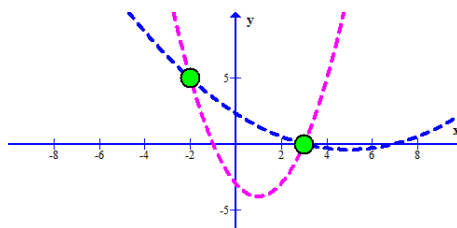
Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = (x+1)(x-3)$ dla $x \in \langle -2, 3 \rangle$

Liczymy wartość na początku i na końcu przedziału.

$$f(-2) = (-2+1)(-2-3) = (-1) \cdot (-5) = 5$$

$$f(3) = (3+1)(3-3) = 4 \cdot 0 = 0$$

Możemy więc narysować szkic wykresu, na którym zaznaczymy te dwa punkty. Nie wiemy jednak, jaki kształt będzie miała ta funkcja. Z wzoru funkcji wiemy, że ramiona będą do góry. Ale nie wiemy jeszcze gdzie jest wierzchołek. Jeśli jest on w przedziale z treści przykładu, to znaczy, że funkcja najpierw maleje, później rośnie (różowy wykres). Jeśli jest on poza przedziałem, wtedy funkcja w całym przedziale maleje, dopiero poza przedziałem zaczyna rosnąć. Policzmy więc współrzędną p wierzchołka. Ponieważ mamy postać iloczynową, korzystamy z miejsc zerowych.



$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

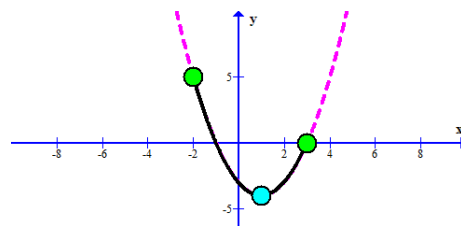
Ponieważ 1 leży między -2 i 3, to znaczy że mamy do czynienia z funkcją o różowym kształcie. Skoro funkcja najpierw maleje, później rośnie w naszym przedziale, to znaczy że dla wierzchołka przyjmuje najmniejszą wartość. Liczymy więc wartość q :

$$q = f(1) = (1+1)(1-3) = 2 \cdot (-2) = -4$$

Znając współrzędne wierzchołka, możemy już narysować interesujący nas fragment funkcji. Najmniejszą wartością jest niebieski wierzchołek. Największą „ta wyższa” zielona wartość na skraju przedziału. Możemy więc zapisać odpowiedź:

$$y_{MIN} = -4$$

$$y_{MAX} = 5$$



Przykład 2

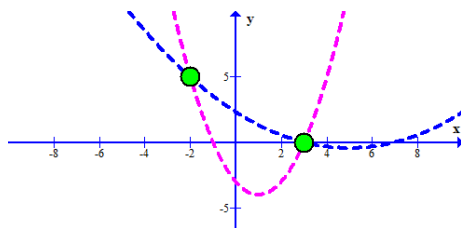
Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{7}{3}$ dla $x \in \langle -2, 3 \rangle$

Liczymy wartość na początku i na końcu przedziału.

$$f(-2) = \frac{1}{9}(-2)^2 - \frac{10}{9} \cdot (-2) + \frac{7}{3} = \frac{4}{9} + \frac{20}{9} + \frac{7}{3} = \frac{24}{9} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3} + \frac{7}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

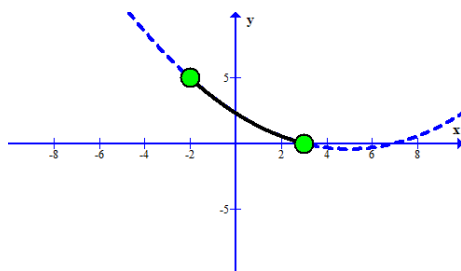
$$f(3) = \frac{1}{9} \cdot 3^2 - \frac{10}{9} \cdot 3 + \frac{7}{3} = \frac{9}{9} - \frac{30}{9} + \frac{7}{3} = 1 - \frac{10}{3} + \frac{7}{3} = 1 - \frac{3}{3} = 1 - 1 = 0$$

Co za przypadek, wyszły nam te same zielone punkty co poprzednim razem. Zaznaczmy je. Nie wiemy jednak, jaki kształt będzie miała ta funkcja. Z wzoru funkcji wiemy, że ramiona będą do góry. Policzmy więc współrzędną p wierzchołka.



$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-\frac{10}{9})}{2 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{2} = 5$$

Ponieważ 5 nie leży między -2 i 3, to znaczy że mamy do czynienia z funkcją o niebieskim kształcie. To znaczy, że w przedziale z treści zadania funkcja cały czas maleje. Nic więcej nas nie interesuje, możemy naszkicować jak nasza funkcja wygląda i zapisać odpowiedź:



$$y_{MIN} = 0$$

$$y_{MAX} = 5$$

- **Równanie dwukwadratowe**

Czasem jest tak, że coś co na pierwszy rzut oka nie jest równaniem kwadratowym, możemy rozwiązać jako równanie kwadratowe, korzystając z metody podstawiania. Weźmy na przykład:

$$f(x) = 2x^4 - 10x^2 + 8$$

Niby podobne do równania kwadratowego, ale mamy potęgę czwartą zamiast drugiej. Możemy wtedy podstawić.

$$\text{Niech: } \begin{matrix} t = x^2 \\ t^2 = x^4 \end{matrix} \wedge t \geq 0$$

Zamieniając niewiadomą z x na t możemy zapisać:

$$f(t) = 2t^2 - 10t + 8$$

Teraz rozwiązujemy jak gdyby nigdy nic, pamiętając że naszą niewiadomą jest t.

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 100 - 64 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$t_1 = \frac{-(-10) - 6}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \vee \quad t_2 = \frac{-(-10) + 6}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Obliczyliśmy dwie możliwości ile wynosi t. Możemy wrócić do x:

$$x^2 = 1 \quad \vee \quad x^2 = 4$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -2$$

Możemy więc zapisać odpowiedź:

$$x \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

To najprostszy przykład, w którym mamy cztery rozwiązania. Spójrzmy na kolejny przykład.

$$f(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$$

$$\text{Niech: } \begin{matrix} t = x^2 \\ t^2 = x^4 \end{matrix} \wedge t \geq 0$$

Zamieniając niewiadomą z x na t możemy zapisać:

$$f(t) = 4t^2 + 15t - 4$$

Teraz rozwiązujemy jak gdyby nigdy nic, pamiętając że naszą niewiadomą jest t.

$$\Delta = (15)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-4) = 225 + 64 = 289$$

$$\sqrt{\Delta} = 17$$

$$t_1 = \frac{-15 - 17}{8} = \frac{-32}{8} = -4 \quad \vee \quad t_2 = \frac{-15 + 17}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Obliczyliśmy dwie możliwości ile wynosi t. Ponieważ t nie może być ujemne, odrzucamy -4. Możemy wrócić do x:

$$x^2 = \frac{1}{4} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Możemy więc zapisać odpowiedź:

$$x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

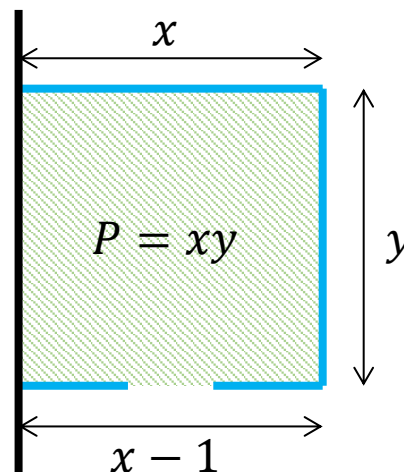
❖ Optymalizacja

Optymalizacja to mądra nazwa dla najlepszej wartości. Mamy 100m ogrodzenia i chcemy największą powierzchnię ogrodzonej działki. Mamy kartkę papieru i chcemy złożyć z niej największą bryłę. Podobnie trudną nazwą jest funkcja dwóch zmiennych. W praktyce używasz ich od dawna. Czego potrzebujesz, by policzyć pole i obwód prostokąta? Dwóch zmiennych. Długości i szerokości. Czego potrzebujesz, by policzyć pole trapezu? Trzech zmiennych. Górnej podstawy, dolnej podstawy i wysokości. Czyli to funkcja trzech zmiennych. Nie ma co się bać trudnych nazw, to tylko mądre słowa nazywające zwykłe rzeczy.

Zróbmy sobie zadanie z treścią.

Mamy 31 metrów siatki. Chcemy ogrodzić z trzech stron ogródek warzywny, zostawiając 1m na furtkę (patrz rysunek). Jakie wymiary powinien mieć ogrodzony obszar?

Zastanówmy się najpierw, jakie wartości może przyjąć x . Na pewno musi być większy niż 1, bo szerokość furtki. Na pewno musi być mniejszy niż 16. Zastanówmy się nad przedziałami. Czy x może mieć 1m? Tak, wtedy furtka będzie na całą szerokość ogródka. Czy x może mieć 16m? Nie, bo wtedy y wynosiłby 0, czyli nie byłoby ogródka. Możemy więc zapisać, że $x \in (1, 16)$. To nasza dziedzina. Przy funkcji kwadratowej nie jest jeszcze potrzebna, ale to dobry nawyk na przyszłość.



Gdy mamy oznaczone wartości, zacznijmy od tego, co mamy dane. Wiemy, że niebieskie ogrodzenie ma razem 31 metrów. Zapiszmy to:

$$x + y + x - 1 = 31$$

$$2x + y = 32$$

$$y = 32 - 2x$$

Możemy teraz napisać wzór na pole, który będzie funkcją jednej zmiennej (czyli tylko x) zamiast funkcją dwóch zmiennych (jak na zielonej trawce).

$$f(x) = x(32 - 2x) = 32x - 2x^2$$

Teraz szukamy wierzchołka.

$$p = \frac{-32}{-4} = 8$$

Obliczyliśmy, że nasz x ma mieć 8 metrów. 8 należy do przedziału od 1 do 16. Czyli mówiąc wprost, to możliwe, żeby ten bok miał 8 metrów.

$$y = 32 - 2x = 32 - 16 = 16$$

Obliczyliśmy że nasz ogródek ma mieć wymiary 8x16m. Wróćmy do pytania. Zawsze rozwiązując zadanie z treścią na koniec warto sprawdzić, czy obliczyliśmy wszystko, o co pytano w zadaniu.

Mamy 31 metrów siatki. Chcemy ogrodzić z trzech stron ogródek warzywny, zostawiając 1m na furtkę (patrz rysunek). Jakie wymiary powinien mieć ogrodzony obszar?

Obliczyliśmy wszystko. Teraz tylko odpowiedź:

Odp: Ogrodzony obszar powinien mieć wymiary 8x16m.

4. Wielomiany

❖ Działania na wielomianach

- Dodawanie, odejmowanie

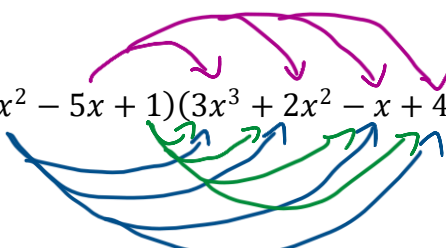
W dodawaniu i odejmowaniu trzeba pamiętać, że potęgi muszą się zgadzać. Czyli x^2 możemy dodać z innym x^2 , jeśli mamy a^2b to możemy dodać je z innym a^2b .

Mnożenie jest przemienne, czyli a^2b to taki sam jednomian jak ba^2 , więc moglibyśmy je dodać czy odjąć. Litery warto pisać w kolejności alfabetycznej. Zapisanie odwrotnie nie jest błędem, ale po co rzucać sobie kłody pod nogi?

Odejmując wielomiany gorąco polecam używanie nawiasów i rozpisywanie powoli. Bardzo łatwo przegapić jakiś znak i go nie odwrócić.

- Mnożenie

Mnożąc dwa wielomiany trzeba pamiętać o nawiasie i o tym, że mnożymy każdy wyraz z każdym. Czyli jeśli w pierwszym wielomianie mamy 4 wyrazy a w drugim 3 wyrazy, będziemy mieli 12 pojedynczych mnożeń, które później musimy zsumować.

$$p(x) = 2x^2 - 5x + 1$$
$$q(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 4$$
$$p(x) \cdot q(x) = (2x^2 - 5x + 1)(3x^3 + 2x^2 - x + 4)$$


Jeśli liczymy, bardzo ważne jest, żeby mnożyć po kolei, żeby nic nie pominąć. Mnożąc, warto policzyć czy mamy odpowiednią liczbę wyrazów.

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^2 - 5x + 1)(3x^3 + 2x^2 - x + 4)$$
$$= 6x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 15x^4 - 10x^3 + 5x^2 - 20x + 3x^3 + 2x^2 - x + 4$$

Mamy 12 wyrazów, możemy porządkować. Polecam podkreślanie wyrazów podobnych. Podkreślanie kolorami jest ładne, ale wiem, że jest też uciążliwe, żeby do każdego wyrazów podobnych używać tych samych kolorów. W praktyce wystarczą dwa kolory:

$$= 6x^5 + \underline{4x^4} - \underline{2x^3} + \underline{8x^2} - \underline{15x^4} - \underline{10x^3} + \underline{5x^2} - \underline{20x} + \underline{3x^3} + \underline{2x^2} - \underline{x} + 4$$
$$= 6x^5 - 11x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 21x + 4$$

Największej i najmniejszej potęgi nie trzeba podkreślać, bo one nie będą miały innych wielomianów podobnych.

Alternatywą dla pisania wszystkiego po kolei jest tabelka:

	$3x^3$	$2x^2$	$-x$	4
$2x^2$	$6x^5$	$4x^4$	$-2x^3$	$8x^2$
$-5x$	$-15x^4$	$-10x^3$	$5x^2$	$-20x$
1	$3x^3$	$2x^2$	$-x$	4

W ten sposób mamy pewność, że niczego nie zgubiliśmy po drodze. Dodajemy wszystko, pamiętając o znakach.

❖ Wzory skróconego mnożenia

Nazwy wzorów skróconego mnożenia pochodzą od tego, co i w jakiej kolejności robimy. Dlatego kolejność słów ma znaczenie. Na przykład kwadrat sumy oznacza, że podnosimy do kwadratu sumę. Czyli $(a + b)^2$. Gdyby słowa były ułożone osobno, czyli gdybyśmy mieli sumę kwadratów, wtedy dodawalibyśmy dwie rzeczy podniesione do kwadratu, czyli $a^2 + b^2$.

Kwadrat sumy $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Sześcian sumy $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Suma sześciątów $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Różnica sześciątów $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Korzystając z wzorów musimy pamiętać o znakach. Warto też pamiętać o tym, że kwadrat to mnożenie czegoś przez dokładnie to samo. Dlatego warto nauczyć się zauważania wzorów, które nie są wzorami skróconego mnożenia na pierwszy rzut oka. Na przykład:

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

Warto też pamiętać, że dodawanie i mnożenie są przemienne. Czyli:

$$(a + b)(b + a) = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

Pamiętajmy, że odejmowanie nie jest przemienne. Czyli na przykład:

$$(a + b)(b - a) = (b + a)(b - a) = b^2 - a^2$$

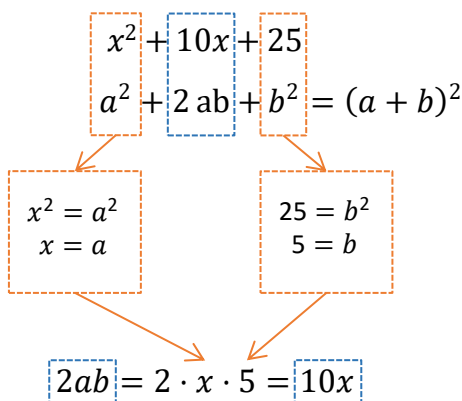
Ważne jest to, że literki nie są świętością. Zazwyczaj mamy a i b , ale tam może być x i y , może być cokolwiek innego. Trzeba się pilnować.

Bardzo ważną umiejętnością jest zauważanie, że jakiś wielomian jest wzorem skróconego mnożenia.

Weźmy na przykład:

$$x^2 + 10x + 25$$

Na pierwszy rzut oka to może być wzór skróconego mnożenia. Zapiszmy obok siebie nasze równanie i wzór skróconego mnożenia, którego spodziewamy się w tym miejscu, pamiętając żeby sprawdzić, czy wszystkie elementy są we właściwej kolejności:



Jeśli to co mamy jest wzorem skróconego mnożenia, każda para musi być taka sama. Schemat zawsze jest ten sam. Sprawdzamy początek i koniec a później sprawdzamy, czy środek się zgadza. Ponieważ środek się zgadza, mamy tu wzór skróconego mnożenia. Możemy więc zapisać, że:

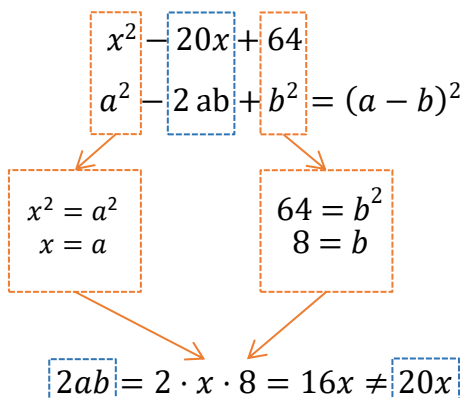
$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Spójrzmy na kolejny przykład.

$$x^2 - 20x + 64$$

Nasze równanie przypomina kwadrat różnicy. Zapiszmy jedno pod drugim:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$



Ponieważ środek się nie zgadza, czyli to nie jest wzór skróconego mnożenia.

Ten sam schemat działa zawsze. Zawsze zaczynamy od brzegu, później zajmujemy się środkiem.

Czas na kolejny przykład:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

To wygląda na pierwszy rzut oka na sześcian sumy. Zapiszmy jedno pod drugim

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 \end{array} \\
 \begin{array}{cc}
 \boxed{x^3 = a^3} & \boxed{8 = b^3} \\
 x = a & 2 = b
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \boxed{3a^2b = 3 \cdot x^2 \cdot 2 = 6x^2} \\
 \boxed{3ab^2 = 3 \cdot x \cdot 2^2 = 12x}
 \end{array}
 \end{array}$$

Cały środek się zgadza, czyli możemy zapisać:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$$

Jeszcze jeden przykład.

$$3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2$$

Być może to kwadrat różnicy. Zapiszmy jedno pod drugim:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \end{array} \\
 \begin{array}{cc}
 \boxed{3x^2 = a^2} & \boxed{2 = b^2} \\
 \sqrt{3}x = a & \sqrt{2} = b
 \end{array} \\
 \boxed{2ab = 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}x}
 \end{array}$$

Ponieważ środek się zgadza, czyli mamy wzór skróconego mnożenia.

$$3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = (\sqrt{3}x - \sqrt{2})^2$$

Warto pamiętać, że wzory skróconego mnożenia mają nam pomagać, ale nie zawsze tak jest. W ostatnim przykładzie możliwe że użycie delty do zapisania postaci iloczynowej byłoby łatwiejsze.

❖ Rozkład wielomianu na czynniki

Rozkład wielomianu na czynniki to zamiana sumy algebraicznej na mnożenie nawiasów. Pomocna jest przy tym znajomość miejsc zerowych. Rozkład na czynniki jest bardzo pomocny przy równaniach wielomianowych.

❖ Równania wielomianowe

Równania wielomianowe rozwiązujemy podobnie jak równania kwadratowe. Wszystko na jedną stronę, przyrównujemy do zera. Przydaje się rozkład na czynniki i twierdzenie Bézouta i twierdzenie o reszcie.

❖ Twierdzenie Bézouta

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem wielomianu.

Od razu warto zauważyć, że skoro mamy „wtedy i tylko wtedy”, czyli to twierdzenie działa w dwie strony. Równie dobrze moglibyśmy zapisać, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu wtedy i tylko wtedy, gdy Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$.

Za twierdzeniem Bézouta stoi bardzo ciekawa logika. Zaczniemy od zapisania, że a jest pierwiastkiem.

$W(a) = 0$ a jest pierwiastkiem, czyli jeśli podstawimy a , wartość wynosi 0.

$W(a) = 0 \cdot P(x)$ 0 razy cokolwiek to zawsze 0, więc możemy napisać sobie coś takiego.

$W(a) = (a - a) \cdot P(x)$ 0 to też wynik odejmowania liczby od samej siebie.

$W(x) = (x - a) \cdot P(x)$ Przejdźmy sobie na ogólny argument x . Jeśli wynosi on a , wtedy wszystko się zeruje jakbyśmy chcieli.

Czyli jeśli znajdziemy x , który jest miejscem zerowym wielomianu, możemy go pisemnie podzielić przez $(x - a)$ i uzyskać wielomian niższego stopnia. Zazwyczaj ręcznie trzeba sprawdzić 1, -1, 2, rzadko kiedy są większe pierwiastki, które musimy znaleźć brutalną metodą podstawiania.

Twierdzenie Bézouta tak naprawdę znasz już od dawna. Wróćmy do funkcji kwadratowej i jej postaci iloczynowej. Jeśli wiesz, że miejscem zerowym funkcji kwadratowej $W(x) = x^2 + x - 42$ jest $x = 6$, to znaczy że możemy ją przedstawić w postaci $W(x) = (x - 6)(\text{coś})$.

Zauważ, że mówiąc o kwadratowej napisałem $W(x)$ zamiast $f(x)$. Czy to coś zmienia? Nie. W jak wielomian, f jak funkcja. To ta sama rzecz, tylko inaczej nazwana.

5. Funkcja wymierna

❖ Wprowadzenie

Funkcja wymierna to funkcja, która jest ułamkiem. Obowiązkowo w mianowniku musi być zmienna. W liczniku może być, ale niekoniecznie. Najważniejszą rzeczą w funkcji wymiernej jest **dziedzina**. Ponieważ nie możemy dzielić przez 0, musimy to uwzględnić.

Najprostszą funkcją wymierną jest $f(x) = \frac{1}{x}$. Ponieważ w mianowniku nie może być 0, możemy zapisać, że:

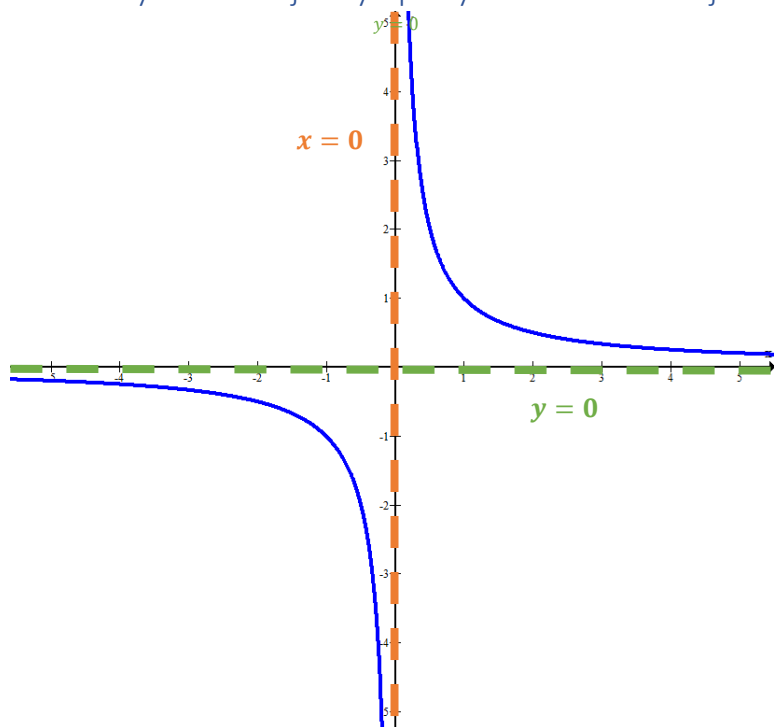
$$x \neq 0$$

To wyjątkowo szybka nierówność. Zapisujemy dziedzinę:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Napisanie dziedziny jest pierwszą rzeczą, od której zaczynamy w funkcji wymiernej.

❖ Wykres funkcji. Asymptoty. Własności funkcji odczytywane z wykresu

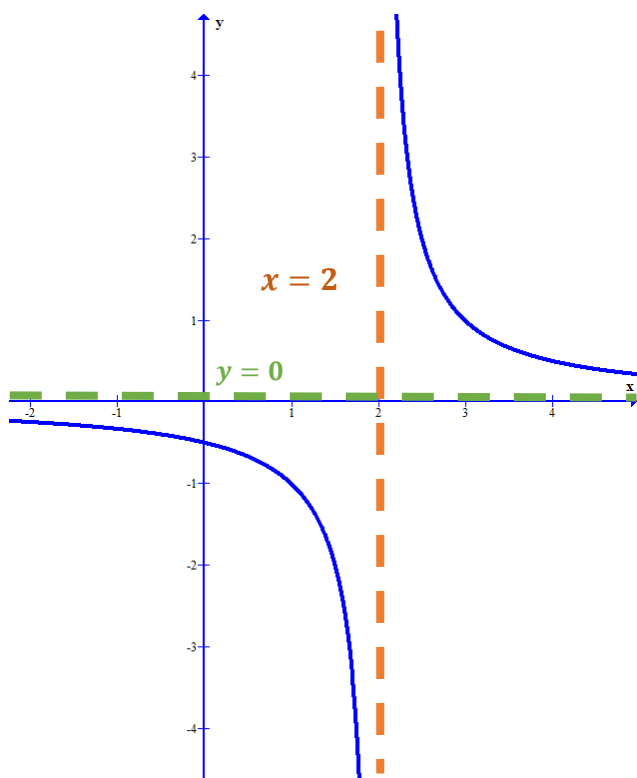


Na niebiesko mamy narysowany wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$. Możemy zauważyć, że licznik tej funkcji zawsze jest dodatni. Jeśli mianownik jest dodatni, to funkcja przyjmuje wartości dodatnie. Jeśli mianownik jest ujemny, funkcja przyjmuje wartości ujemne. Fakt, że mianownik jest czasem dodatni, czasem ujemny jest dla nas bardzo ważne.

Zaznaczyłem na wykresie dwie przerywane linie. Pomarańczowa pokazuje, dla jakich argumentów x ta funkcja nie istnieje. Możemy ją obliczyć i narysować podstawiając argumenty mniejsze albo większe niż 0. To wynika z dziedziny, czyli

mianownika. Wykres funkcji zbliża się do przerywanej linii ale nigdy jej nie dotyka. Podobnie jest z przerywaną zieloną linią. Ta funkcja może przyjmować różne wartości, ale nigdy nie będziemy mieli wartości równej 0. Nie ma takiej liczby, przez którą możemy podzielić 1, żeby wyszło 0. Każda funkcja wymierna ma dwie asymptoty, pionową (związaną z dziedziną) i poziomą (związaną ze zbiorem wartości).

Asymptota pionowa jest łatwa do obliczenia. Tak naprawdę liczymy ją w trakcie liczenia dziedziny. W tym przypadku skoro x nie może być zerem, to znaczy że asymptota pionowa to $x = 0$.



Spójrzmy sobie na wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Jak mówiłem, asymptota pionowa jest związana z dziedziną. Czy ta funkcja istnieje dla wszystkich x należących do liczb rzeczywistych? Nie możemy dzielić przez zero, więc:

$$x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

Stąd otrzymujemy dwie rzeczy. Po pierwsze **diedzina**:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Po drugie **asymptota pionowa**:

$$x = 2$$

Podsumowując, dziedzina mówi o tym, kiedy funkcja istnieje. Asymptota o tym, kiedy funkcja nie istnieje.

Jeśli weźmiemy jakąś liczbę, to funkcja może istnieć, albo nie istnieć. Tertium non datur (łac. trzeciej opcji nie ma). Wspominałem, że w matematyce wszystko da się zapisać trudniej? Nie ma to jak powołać się na Prawo Wyłączonego Środka.

Gdy już mamy dziedzinę, zapiszmy sobie **zbiór wartości**, czyli y które są wartościami tej funkcji.

$$ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

W parze ze zbiorem wartości idzie asymptota pozioma, czyli wartość której funkcja nigdy nie przyjmuje:

$$y = 0$$

Monotoniczność mówi, kiedy funkcja rośnie a kiedy maleje. Ta funkcja maleje w dwóch przedziałach:

$$f \searrow \text{ dla } x \in (-\infty, 2)$$

$$f \searrow \text{ dla } x \in (2, \infty)$$

To bardzo ważne, że to nie jeden przedział, tylko dwa osobne kawałki, dlatego zapisujemy to osobno. Najpierw funkcja maleje a później znów maleje w nowym, osobnym przedziale.

❖ Przesunięcie wykresu funkcji

Przesunięcie wzdłuż osi OX (lewo prawo) to zmiana bezpośrednio przy x . Tak naprawdę używaliśmy tego już w postaci kanonicznej.

$f(x)$ to oryginalna funkcja

$f(x - p)$ to funkcja przesunięta o p .

Jeśli p jest dodatnie, to przesuwamy w prawo. Jeśli ujemne, przesuwamy w lewo.

Spójrzmy na kilka przykładów:

- a) $f(x - 5)$ czyli $p = 5$, przesuwamy funkcję o 5 w prawo
- b) $f(x + 3)$ czyli $p = -3$, przesuwamy funkcję o 3 w lewo
- c) $f(x - 7)$ czyli $p = 7$, przesuwamy funkcję o 7 w prawo
- d) $f(x + 9)$ czyli $p = 9$, przesuwamy funkcję o 9 w lewo

Przesunięcie wzdłuż osi OY (góra dół) to zmiana na samym końcu. Tego tak naprawdę też używaliśmy już w postaci kanonicznej.

$f(x)$ to oryginalna funkcja

$f(x) + q$ to funkcja przesunięta o q .

Jeśli q jest dodatnie, to przesuwamy w górę. Jeśli ujemne, przesuwamy w dół.

Spójrzmy na kilka przykładów:

- a) $f(x) + 5$ czyli $p = 5$, przesuwamy funkcję o 5 w górę
- b) $f(x) - 3$ czyli $p = -3$, przesuwamy funkcję o 3 w dół
- c) $f(x) + 7$ czyli $p = 7$, przesuwamy funkcję o 7 w górę
- d) $f(x) - 9$ czyli $p = 9$, przesuwamy funkcję o 9 w dół

Specjalnie nie podawałem przykładów konkretnych funkcji, bo przesunięcie wektorowe to ogólne, uniwersalne działanie, które możemy zastosować w każdej funkcji.

Przesuńmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$:

- | | | |
|---------------|--|----------------------------|
| a) $f(x - 5)$ | czyli $p = 5$, przesuwamy funkcję o 5 w prawo | $f(x - 5) = \frac{1}{x-5}$ |
| b) $f(x + 3)$ | czyli $p = -3$, przesuwamy funkcję o 3 w lewo | $f(x + 3) = \frac{1}{x+3}$ |
| c) $f(x) + 7$ | czyli $p = 7$, przesuwamy funkcję o 7 w górę | $f(x) = \frac{1}{x} + 7$ |
| d) $f(x) - 9$ | czyli $p = 9$, przesuwamy funkcję o 9 w dół | $f(x) = \frac{1}{x} - 9$ |

Zróbmy małą powtórkę z funkcji kwadratowej. Przesuwanie funkcji kwadratowej to tak naprawdę postać kanoniczna

Przesuńmy funkcję $f(x) = x^2$:

- a) $f(x - 5)$ czyli $p = 5$, przesuwamy funkcję o 5 w prawo, wierzchołek $(5, 0)$

$$f(x - 5) = (x - 5)^2$$

- b) $f(x + 3)$ czyli $p = -3$, przesuwamy funkcję o 3 w lewo, wierzchołek $(-3, 0)$

$$f(x + 3) = (x + 3)^2$$

- c) $f(x) + 7$ czyli $p = 7$, przesuwamy funkcję o 7 w górę, wierzchołek $(0, 7)$

$$f(x) = x^2 + 7$$

- d) $f(x) - 9$ czyli $p = 5$, przesuwamy funkcję o 9 w dół, wierzchołek $(0, -9)$

$$f(x) = x^2 - 9$$

❖ Działania na liczbach wymiernych

Działania na liczbach wymiernych to moment, gdzie musimy bardzo pilnować dziedziny. Zawsze zaczynamy od tego, by napisać, kiedy dane działanie może istnieć. Jeśli w działaniu są dwa ułamki, wtedy jeden i drugi musi istnieć.

• Dodawanie

Przy dodawaniu i odejmowaniu ułamków, potrzebujemy wspólnego mianownika. Ułamki wymierne działają dokładnie tak samo jak ułamki zwykłe, możemy je rozszerzać i skracać. Działa to analogicznie do „zwykłych” ułamków, gdzie mieliśmy tylko liczby

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{6}{15} \quad \text{ponieważ} \quad \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{2}{x+5} = \frac{2}{x+5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{4}{2x+10} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \{-5\} \quad \text{ponieważ} \quad \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \{-1, 1\} \quad \text{ponieważ} \quad \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Jeśli chcemy dodać ułamki, rozszerzamy je by znaleźć wspólny mianownik. Wystarczy pomnożyć każdy ułamek przez mianownik drugiego ułamka.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Wiem, że to łatwe i było dawno, chcę podkreślić że dla liczb wymiernych działa to tak samo. Jedyną różnicą jest to, że zaczynamy od dziedziny.

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

Zaczynamy od dziedziny:

$$x + 3 \neq 0 \wedge x + 2 \neq 0$$

$$x \neq -3 \wedge x \neq -2$$

$$x \in R \setminus \{-3, -2\}$$

Teraz możemy sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika i dodać je do siebie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+3} + \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x+2}{x+2} = \frac{x+3}{(x+3)(x+2)} + \frac{x+2}{(x+3)(x+2)} \\ &= \frac{(x+3) + (x+2)}{(x+3)(x+2)} = \frac{x+3+x+2}{(x+3)(x+2)} = \frac{2x+5}{(x+3)(x+2)} \end{aligned}$$

Oczywiście tutaj rozpisałem wszystko bardzo szczegółowo, w praktyce część kroków można zrobić w pamięci. Zauważ, że nie wymnażałem mianownika. Na dole mamy funkcję kwadratową, można ją zostawić w postaci ogólnej. Zaletą postaci ogólnej jest to, że wyraźnie widać, czy możemy coś skrócić.

- **Odejmowanie**

Zróbmy teraz odejmowanie. Oczywiście zaczynamy od napisania dziedziny. Można ją rozpisywać krok po kroku, można ją odczytać od razu. Tym razem zróbmy ją krócej. Przy odejmowaniu trzeba pamiętać, żeby **zmienić znaki**:

$$x \in R \setminus \{-3, -2\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+3} - \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x+2}{x+2} = \frac{x+3}{(x+3)(x+2)} - \frac{x+2}{(x+3)(x+2)} \\ &= \frac{(x+3) - (x+2)}{(x+3)(x+2)} = \frac{x+3-x-2}{(x+3)(x+2)} = \frac{1}{(x+3)(x+2)} \end{aligned}$$

- **Mnożenie**

Mnożenie wyrażeń jest najłatwiejszym działaniem. Mnożymy licznik razy licznik, mianownik razy mianownik. Oczywiście zaczynamy od dziedziny:

$$x \in R \setminus \{-5, 3\}$$

$$\frac{x+4}{x+5} \cdot \frac{x-2}{x-3} = \frac{(x+4)(x-2)}{(x+5)(x-3)}$$

Oczywiście możemy wymnożyć licznik i mianownik, ale czy jest nam to potrzebne? Zazwyczaj nie.

Przy dzieleniu mamy często do czynienia z

- **Dzielenie**

Dzielenie wyrażeń wymiernych wymaga szczególnej uwagi, jeśli chodzi o dziedzinę. Oczywiście w mianownikach nie możemy mieć zera, żeby ułamki istniały. Nie możemy dzielić przez zero, czyli drugi ułamek nie może być zerem. To oznacza, że nie możemy mieć zera w drugim liczniku.

$$\frac{x+4}{x+5} : \frac{x-2}{x-3}$$

$$x+5 \neq 0 \wedge x-3 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0$$

$$x \neq -5 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq 2$$

$$x \in R \setminus \{-5, 2, 3\}$$

Dzielenie to mnożenie przez odwrotność, więc przekreślamy drugi ułamek do góry nogami i dalej wykonujemy mnożenie.

$$\frac{x+4}{x+5} : \frac{x-2}{x-3} = \frac{x+4}{x+5} \cdot \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x+5)(x-2)}$$

Oczywiście możemy wymnożyć nawiasy, ale nie zawsze to jest konieczne.

- **Skracanie wyrażeń wymiernych**

Gdy mnożymy ułamki, czasem mamy możliwość skrócić ułamek. Działa to tak samo jak znasz od dawna, skracamy coś z góry z czymś z dołu. Skracać możemy tylko przy mnożeniu. Dlatego jeśli dzielimy, najpierw musimy przejść do mnożenia, dopiero wtedy możemy skracać. Spójrz na przykład:

$$\frac{x+1}{x-9} : \frac{x-2}{x-9}$$

Zaczynamy od dziedziny:

$$x \in R \setminus \{2, 9\}$$

$$\frac{x+1}{x-9} : \frac{x-2}{x-9} = \frac{x+1}{x-9} \cdot \frac{x-9}{x-2} = \frac{x+1}{1} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{x-2}$$

Co ważne, skracanie nie zmienia dziedziny. Zaczęliśmy od tego, że nie możemy podstawić dwójki i dziewiątki, by nie łamać zasad matematyki. Wydawać by się mogło, że teraz możemy podstawić 9 do końcowego wyniku, ale to niemożliwe. Dziedzina obowiązuje nas od początku do końca. Matematyka jest królową nauk, dziedzina jest królową matematyki.

Skracanie czasem wymaga od nas wyciągnięcia czegoś przed nawias. Spójrz na przykład:

$$x \in R \setminus \{-7\}$$

$$\frac{x+7}{2x+14} = \frac{1 \cdot (x+7)}{2 \cdot (x+7)} = \frac{1}{2}$$

Tej jedynki nie musimy wyciągać przed nawias, pokazuję to tylko dla przykładu

❖ Równania wymierne

Rozwiązując równania wymierne zawsze zaczynamy od dziedziny. Najwygodniej sprowadzić równanie do jednego ułamka, który ma być równy 0. Wtedy wystarczy skorzystać z tego, że ułamek jest równy 0, jeśli licznik jest równy 0. Na koniec trzeba sprawdzić, **czy rozwiązania należą do dziedziny?** To jedno pytanie to kwintesencja równań wymiernych.

Przykład 1.

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$$

$$D = R \setminus \{2\}$$

Jak zawsze zaczynamy od dziedziny

$$x^2 - 4 = 0$$

Korzystamy z tego, że licznik musi być równy 0.

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \notin D \vee x = -2$$

Zapis „2 nie należy do dziedziny” jest szybki, ale to nie jedyny sposób

$$x = -2$$

Przykład 2.

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^3 + x^2 - 6x} = 0$$

$$x^3 + x^2 - 6x \neq 0 \quad \text{Czasem obliczenie dziedziny to połowa zadania}$$

$$x(x^2 + x - 6) \neq 0$$

$$x \neq 0 \wedge x^2 + x - 6 \neq 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \quad \text{Pomocnicze równanie kwadratowe}$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \vee x_2 = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x \neq 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 2$$

$$D = R \setminus \{-3, 0, 2\} \quad \text{Wreszcie mamy dziedzinę}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad \text{Wracamy do równania}$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 \quad \text{Znow delta}$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{2 - 8}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \notin D \vee x_2 = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x = 5$$

❖ Równania z wartością bezwzględną

Wartość bezwzględna (moduł) to odległość liczby od 0 na osi liczbowej. Krótko mówiąc moduł zostawia samą liczbę. Potocznie mówi się o tym, że moduł odwraca albo nie odwraca liczbę.

$$|5| = 5 \quad \text{moduł nic nie zmienił}$$

$$|-3| = 3 \quad \text{moduł zmienił liczbę ujemną na dodatnią}$$

Dla formalności zapiszmy definicję modułu. To co zapisałem wyżej wystarczy by rozumieć i używać modułu, ale definicja przyda się na przyszłość.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Minus we wzorze oznacza, że jeśli x jest ujemny, mnożymy go razy -1 i dostajemy liczbę dodatnią.

Nas interesuje praktyczny wniosek. Jeśli mamy równanie z modułem, nie wiemy czy w środku była liczba dodatnia czy ujemna.

$$|x - 2| = 3$$

Mamy dwie możliwości, w środku w module jest liczba dodatnia albo ujemna. $|3| = 3$ i $|-3| = 3$, czyli możemy napisać, że:

$$x - 2 = 3 \vee x - 2 = -3$$

$$x = 5 \vee x = -1$$

$$x \in \{-1, 5\}$$

Moduły działają podobnie jak nawiasy. Moduł jest zawsze dodatni, więc jeśli pomnożymy go przez liczbę dodatnią, wtedy wynik dalej będzie dodatni.

$$2|x - 3| = |2x - 6|$$

Czasem może się wydawać, że w równaniu mamy kilka modułów, ale tak naprawdę to ten sam moduł i obowiązują go działania jakby to były nawiasy:

$$|3x + 12| + |2x + 8| = 15$$

$$3|x + 4| + 2|x + 4| = 15$$

$$5|x + 4| = 15$$

$$|x + 4| = 3$$

$$x + 4 = 3 \vee x + 4 = -3$$

$$x = -1 \vee x = -7$$

$$x \in \{-7, -1\}$$

6. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

O funkcji wykładniczej i logarytmicznej ciężko mówić osobno. One są ze sobą powiązane jak dodawanie i odejmowanie, potęgowanie i pierwiastkowanie. I właśnie potęgowanie jest fundamentem w tych funkcjach, dlatego zacznijmy od powtórzenia działań na potęgach.

❖ Powtórka z potęg

1.	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$	$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
2.	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$	$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$
3.	$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$	$8\sqrt{2} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3+\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}}$
4.	$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	$\sqrt[3]{64} = (64)^{\frac{1}{3}} = (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{6 \cdot \frac{1}{3}} = 2^2$
5.	$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	$\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3$	$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2} = 2^{\frac{1}{2}-2} = 2^{-1\frac{1}{2}}$
6.	$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$	$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$	$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$
7.	$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$	$0,6^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

$$32^{0,6} = 32^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$32^{0,6} = \left(2^5\right)^{0,6} = 2^{5 \cdot 0,6} = 2^3 = 8$$

$$(1,2 \cdot 10^6)^2 = 1,2^2 \cdot (10^6)^2 = 1,44 \cdot 10^{12}$$