Dowody podzielności

Udowodnienie podzielności polega na zapisaniu wyrażenia w postaci mnożenia. Na przykład zapisując $21 = 3 \cdot 7$ udowodniliśmy, że 21 jest podzielne przez 3 i przez 7. Podobnie możemy udowodnić, że liczba dzieli się z resztą. Zapisując $25 = 4 \cdot 6 + 1$ udowadniamy, że 25 przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Dokładnie ten sam schemat działa dla wyrażeń algebraicznych.

- **Liczba parzysta –** to liczba która jest podzielna przez 2. Można ją zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{n = 2k}, gdzie\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$ to zbiór liczb całkowitych.

- **Liczba nieparzysta –** to liczba która jest niepodzielna przez 2, czyli reszta z dzielenia przez 2 wynosi 1. Można ją zapisać w postaci

$$\boldsymbol{n = 2k + 1}, gdzie\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

Na maturze mamy dwa typy zadań z udowadnianiem podzielności.

- **Zadanie z wyrażeniami algebraicznymi** – polega na wyciągnięciu przed nawias, często przydają się wzory skróconego mnożenia.

Przykład 1

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $\boldsymbol{n \geq 1}$ liczba $\boldsymbol{(2n+6)^2 - 4n}$ jest podzielna przez 4.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}(2n+6)^2 - 4n &= (2n)^2 + 2 \cdot 2n \cdot 6 + 6^2 - 4n = 4n^2 + 24n + 36 - 4n \\ &= 4n^2 + 20n + 36 = 4(n^2 + 5n + 9)\end{aligned}$$

Co należało wykazać.

$\boldsymbol{(n^2 + 5n + 9)}$ na pewno jest liczbą całkowitą. Przedstawiliśmy liczbę z treści zadania jako mnożenie 4 i liczby całkowitej, w ten sposób udowodniliśmy, że jest podzielna przez 4.

Przykład 2

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $\boldsymbol{n \geq 1}$ liczba $(\boldsymbol{4n+3})^{\boldsymbol{2}}$ jest przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1.

Rozwiązanie:

$$(4n+3)^2 = (4n)^2 + 2 \cdot 4n \cdot 6 + 3^2 = 16n^2 + 48n + 9 = 16n^2 + 48n + 8 + 1$$
$$= 8(2n^2 + 6n + 1) + 1$$

Co należało wykazać.

$(\boldsymbol{2n^2 + 6n + 1})$ na pewno jest liczbą całkowitą. Przedstawiliśmy liczbę z treści zadania jako mnożenie 8 i liczby całkowitej, gdzie na końcu mamy resztę 1. Zauważ sztuczkę, z której skorzystaliśmy, zamieniając $\boldsymbol{9}$ na $\boldsymbol{8+1}$. Chcieliśmy wyciągnąć 8 przed nawias, dlatego zamieniliśmy na dodawanie.

- **Zadanie z potęgami** – polega na wyciągnięciu przed nawias, korzystając z wzorów na potęgi.

Przykład 3

Wykaż, że liczba $\boldsymbol{2^8 - 2^7 + 2^5}$ jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie:

$$2^8 - 2^7 + 2^5 = 2^5(2^3 - 2^2 + 1) = 2^5(8 - 4 + 1) = 2^5 \cdot 5$$

Co należało wykazać.

Zapisaliśmy $\boldsymbol{2^8 - 2^7 + 2^5}$ jako iloczyn 5 i 2^5, czyli musi być podzielna przez 5. Dla przypomnienia, skorzystaliśmy z tego, że $2^8 = 2^{5+3} = 2^5 \cdot 2^3$.

Przykład 4

Wykaż, że liczba $\boldsymbol{3^{2025} + 3^{2026} + 3^{2027}}$ jest podzielna przez 13.

Rozwiązanie:

$$3^{2025} + 3^{2026} + 3^{2027} = 3^{2025}(1 + 3^1 + 3^2) = 3^{2025}(1 + 3 + 9) = 3^{2025} \cdot 13$$

Co należało wykazać.

Zapisaliśmy $\boldsymbol{3^{2025} + 3^{2026} + 3^{2027}}$ jako iloczyn 13 i 3^{2025}, czyli musi być podzielna przez 13. Przy okazji, załapaliście dowcip? Bo wiecie, 3 do potęgi 2025. A mamy 2025 rok. Zabawne, prawda? Prawda…?